Логические основы теории сложности доказательств

Александр Смаль

Лекция №2

27 марта 2009 г.

Что было на первой лекции?

1. Пропозициональная логика.
2. Генценовская система доказательств для пропозициональной логики **PK**.
3. Логика первого порядка.
4. Секвенциальная система доказательств для логики первого порядка **LK**.
5. Закреплённые (anchored) доказательства.
6. Теоремы корректности и полноты для систем доказательств **PK** и **LP** (в том числе и для закреплённых доказательств).
7. Теоремы компактности для пропозициональной логики и логики первого порядка.
8. Слабые структуры и аксиомы равенства.

Базовые определения

Определение

Если $\mathcal{L}$ — язык логики первого порядка, то $\mathcal{L}$-**структура** (**модель для** $\mathcal{L}$) $\mathcal{M}$ состоит из:

1. множества $M \neq \emptyset$, называемого **универсум**;
2. интерпретации для каждого функционального символа (отображения);
3. интерпретации для каждого предикатного символа (отношения).

Базовые определения

Определение

Если $\mathcal{L}$ — язык логики первого порядка, то $\mathcal{L}$-**структура** (**модель для** $\mathcal{L}$) $\mathcal{M}$ состоит из:

1. множества $M \neq \emptyset$, называемого **универсум**;
2. интерпретации для каждого функционального символа (отображения);
3. интерпретации для каждого предикатного символа (отношения).

Определение

Теория над языком $\mathcal{L}$ — множество формул из $\mathcal{L}$ замкнутое относительно логического следствия и универсального замыкания.
Будем также определять теорию $\mathcal{T}$ через множество её аксиом Γ.

$$\mathcal{T} = \{A \mid A \text{ — } \mathcal{L}\text{-формула и } \forall\Gamma \models A\}.$$

Базовые определения

Определение

Если $\mathcal{L}$ — язык логики первого порядка, то $\mathcal{L}$**-структура** (**модель для** $\mathcal{L}$) $\mathcal{M}$ состоит из:

1. множества $M \neq \emptyset$, называемого **универсум**;
2. интерпретации для каждого функционального символа (отображения);
3. интерпретации для каждого предикатного символа (отношения).

Определение

Теория над языком $\mathcal{L}$ — множество формул из $\mathcal{L}$ замкнутое относительно логического следствия и универсального замыкания.
Будем также определять теорию $\mathcal{T}$ через множество её аксиом Γ.

$$\mathcal{T} = \{A \mid A \text{ — } \mathcal{L}\text{-формула и } \forall \Gamma \models A\}.$$

Определение

A называется **теоремой** $\mathcal{T}$, если $A \in \mathcal{T}$. Будем обозначать $A \vdash \mathcal{T}$.

Истинная арифметика

Определение

Язык арифметики $\mathcal{L}_A = [0, 1, +, \cdot\ ;\ =, \leq]$.

Истинная арифметика

Определение

Язык арифметики $\mathcal{L}_A = [0, 1, +, \cdot\ ;\ =, \leq]$.

Определение

Стандартная модель $\underline{\mathbb{N}}$ для $\mathcal{L}_A$ — модель с универсумом $M = \mathbb{N}$, в которой $0, 1, +, \cdot\ , =, \leq$ принимают свои стандартные для $\mathbb{N}$ значения. Будем использовать обозначение $t < u$ для $(t \leq u \wedge t \neq u)$.

Истинная арифметика

Определение

Язык арифметики $\mathcal{L}_A = [0, 1, +, \cdot\ ;\ =, \leq]$.

Определение

Стандартная модель $\mathbb{N}$ для $\mathcal{L}_A$ — модель с универсумом $M = \mathbb{N}$, в которой $0, 1, +, \cdot\ , =, \leq$ принимают свои стандартные для $\mathbb{N}$ значения. Будем использовать обозначение $t < u$ для $(t \leq u \wedge t \neq u)$.

Определение

Нумералом для числа n будем называть терм $\underline{n}$, определяемый индуктивно: $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, $\underline{n+1} = (\underline{n} + 1)$. Пример: $\underline{3} = ((1 + 1) + 1)$.

Истинная арифметика

Определение

Язык арифметики $\mathfrak{L}_A = [0, 1, +, \cdot\ ;\ =, \leq]$.

Определение

Стандартная модель $\underline{\mathbb{N}}$ для $\mathfrak{L}_A$ — модель с универсумом $M = \mathbb{N}$, в которой $0, 1, +, \cdot\ , =, \leq$ принимают свои стандартные для $\mathbb{N}$ значения. Будем использовать обозначение $t < u$ для $(t \leq u \wedge t \neq u)$.

Определение

Нумералом для числа n будем называть терм $\underline{n}$, определяемый индуктивно: $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, $\underline{n+1} = (\underline{n} + 1)$. Пример: $\underline{3} = ((1 + 1) + 1)$.

Определение

TA *(True Arithmetic)* — теория над $\mathfrak{L}_A$, содержащая все формулы, чьи универсальные замыкания верны $\underline{\mathbb{N}}$. **TA** $= \{A \mid \underline{\mathbb{N}} \models \forall A\}$.

Истинная арифметика

Определение

Язык арифметики $\mathcal{L}_A = [0, 1, +, \cdot\ ;\ =, \leq]$.

Определение

Стандартная модель $\underline{\mathbb{N}}$ для $\mathcal{L}_A$ — модель с универсумом $M = \mathbb{N}$, в которой $0, 1, +, \cdot\ , =, \leq$ принимают свои стандартные для $\mathbb{N}$ значения. Будем использовать обозначение $t < u$ для $(t \leq u \wedge t \neq u)$.

Определение

Нумералом для числа n будем называть терм $\underline{n}$, определяемый индуктивно: $\underline{0} = 0$, $\underline{1} = 1$, $\underline{n+1} = (\underline{n} + 1)$. Пример: $\underline{3} = ((1 + 1) + 1)$.

Определение

TA *(True Arithmetic)* — теория над $\mathcal{L}_A$, содержащая все формулы, чьи универсальные замыкания верны $\underline{\mathbb{N}}$. **TA** $= \{A \mid \underline{\mathbb{N}} \models \forall A\}$.

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что **TA** не имеет вычислимого множества аксиом.

$1-$**BASIC**

Определим набор аксиом $1-$**BASIC**

B1. $x + 1 \neq 0$	**B5.** $x \cdot 0 = 0$
B2. $x + 1 = y + 1 \supset x = y$	**B6.** $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$
B3. $x + 0 = x$	**B7.** $(x \leq y \wedge y \leq x) \supset x = y$
B4. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$	**B8.** $x \leq x + y$
C. $0 + 1 = 1$	

$1-$**BASIC**

Определим набор аксиом $1-$**BASIC**

B1. $x + 1 \neq 0$	**B5.** $x \cdot 0 = 0$
B2. $x + 1 = y + 1 \supset x = y$	**B6.** $x \cdot (y + 1) = (x \cdot y) + x$
B3. $x + 0 = x$	**B7.** $(x \leq y \wedge y \leq x) \supset x = y$
B4. $x + (y + 1) = (x + y) + 1$	**B8.** $x \leq x + y$
C. $0 + 1 = 1$	

Лемма

Если φ *— бескванторное высказывание языка* $\mathfrak{L}_A$, *то*

$$\mathbf{TA} \vdash \varphi \iff 1\text{–}\mathbf{BASIC} \vdash \varphi.$$

$1-$**BASIC**

Определим набор аксиом $1-$**BASIC**

B1. $x+1\neq 0$	**B5.** $x\cdot 0=0$
B2. $x+1=y+1\supset x=y$	**B6.** $x\cdot(y+1)=(x\cdot y)+x$
B3. $x+0=x$	**B7.** $(x\leq y\wedge y\leq x)\supset x=y$
B4. $x+(y+1)=(x+y)+1$	**B8.** $x\leq x+y$
C. $0+1=1$	

Лемма

Если φ — бескванторное высказывание языка $\mathcal{L}_A$, то

$$\mathbf{TA}\vdash\varphi \iff 1\text{–}\mathbf{BASIC}\vdash\varphi.$$

Определение

Если Φ — множество формул, то множество аксиом $\Phi-$**IND**:

$$[\varphi(0)\wedge\forall x\varphi(x)\supset\varphi(x+1)]\supset\forall z\varphi(z),\quad \text{где } \varphi\in\Phi$$

($\varphi(x)$ может иметь свободные переменные переменные кроме x).

Арифметика Пеано

Определение

Теория **PA** *(Peano Arithmetic)* содержит аксиомы **B1, . . . , B8** вместе с $\Phi-$**IND**, где Φ — множество всех $\mathcal{L}_A$ формул.

Арифметика Пеано

Определение

Теория **PA** *(Peano Arithmetic)* содержит аксиомы **B1, . . . , B8** вместе с $\Phi-$**IND**, где Φ — множество всех $\mathcal{L}_A$ формул.

Определение

Если переменная x не входит в терм t, то будем использовать запись $\exists x \leq tA$ для обозначения $\exists x(x \leq t \wedge A)$, и $\forall x \leq tA$ для обозначения $\forall x(x \leq t \supset A)$. Такие кванторы называются **ограниченными**. Формула **ограниченна**, если все её кванторы ограниченны.

Арифметика Пеано

Определение

Теория **PA** *(Peano Arithmetic)* содержит аксиомы **B1, . . . , B8** вместе с Φ**−IND**, где Φ — множество всех $\mathcal{L}_A$ формул.

Определение

Если переменная x не входит в терм t, то будем использовать запись $\exists x \leq tA$ для обозначения $\exists x(x \leq t \wedge A)$, и $\forall x \leq tA$ для обозначения $\forall x(x \leq t \supset A)$. Такие кванторы называются **ограниченными**. Формула **ограниченна**, если все её кванторы ограниченны.

Определение

OPEN — множество всех бескванторных формул. Δ_0 — множество всех ограниченных формул. Σ_1 — множество всех формул вида $\exists\vec{x}\varphi$, где φ ограниченна, а $\vec{x}$ возможно пустой вектор переменных. Теории **IOPEN**, $\mathbf{I}\Delta_0$ и $\mathbf{I}\Sigma_1$ — подсистемы **PA**, полученные ограничением схемы индукции на множествах **OPEN**, Δ_0 и Σ_1 соответственно.

IOPEN

Следующие формулы и их универсальные замыкания являются теоремами **IOPEN**:

O1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения)

O2. $x + y = y + x$ (коммутативность сложения)

O3. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ (дистрибутивный закон)

O4. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (ассоциативность умножения)

O5. $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность умножения)

O6. $x + y = y + z \supset x = y$ (закон сокращения для сложения)

O7. $0 \leq x$

O8. $x \leq 0 \supset x = 0$

O9. $x \leq x$

O10. $x \neq x + 1$

$\mathbf{I}\Delta_0$

Следующие формулы и их универсальные замыкания являются теоремами $\mathbf{I}\Delta_0$:

D1. $x \neq 0 \supset \exists y \leq x(x = y + 1)$ (существование предыдущего)

D2. $\exists z(x + z = y \vee y + z = x)$

D3. $x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y)$

D4. $(x \leq y \wedge y \leq z) \supset x \leq z$ (транзитивность)

D5. $x \leq y \vee y \leq x$ (полный порядок)

D6. $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z$

D7. $x \leq y \supset x \cdot z \leq y \cdot z$

D8. $x \leq y + 1 \leftrightarrow (x \leq y \vee x = y + 1)$ (дискретность 1)

D9. $x < y \leftrightarrow x + 1 \leq y$ (дискретность 2)

D10. $x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0 \supset x = y$ (закон сокращения для умножения)

$\mathbf{I}\Delta_0$

Следующие формулы и их универсальные замыкания являются теоремами $\mathbf{I}\Delta_0$:

D1. $x \neq 0 \supset \exists y \leq x(x = y + 1)$ (существование предыдущего)

D2. $\exists z(x + z = y \vee y + z = x)$

D3. $x \leq y \leftrightarrow \exists z(x + z = y)$

D4. $(x \leq y \wedge y \leq z) \supset x \leq z$ (транзитивность)

D5. $x \leq y \vee y \leq x$ (полный порядок)

D6. $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z$

D7. $x \leq y \supset x \cdot z \leq y \cdot z$

D8. $x \leq y + 1 \leftrightarrow (x \leq y \vee x = y + 1)$ (дискретность 1)

D9. $x < y \leftrightarrow x + 1 \leq y$ (дискретность 2)

D10. $x \cdot z = y \cdot z \wedge z \neq 0 \supset x = y$ (закон сокращения для умножения)

Т.о. все модели $\mathbf{I}\Delta_0$ являются коммутативными и дискретно-упорядоченными.

Несколько лемм

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что существует ограниченная формула $\varphi(x)$ такая, что $\forall x \phi(x)$ верна, но $\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \forall \varphi(x)$.

Несколько лемм

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что существует ограниченная формула $\varphi(x)$ такая, что $\forall x \phi(x)$ верна, но $\mathbf{I\Delta_0} \nvdash \forall \varphi(x)$.

Лемма

Если φ — Σ_1 *высказывание, то* $\mathbf{TA} \vdash \varphi \iff \mathbf{I\Delta_0} \vdash \varphi$.

Несколько лемм

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что существует ограниченная формула $\varphi(x)$ такая, что $\forall x \phi(x)$ верна, но $\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \forall \varphi(x)$.

Лемма

Если φ — Σ_1 *высказывание, то* $\mathbf{TA} \vdash \varphi \iff \mathbf{I}\Delta_0 \vdash \varphi$.

Лемма

Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbf{I}\Delta_0 \vdash x \leq \underline{n} \leftrightarrow (x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n})$.

Несколько лемм

Из теоремы Гёделя о неполноте следует, что существует ограниченная формула $\varphi(x)$ такая, что $\forall x \phi(x)$ верна, но $\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \forall \varphi(x)$.

Лемма

Если φ — Σ_1 *высказывание, то* $\mathbf{TA} \vdash \varphi \iff \mathbf{I}\Delta_0 \vdash \varphi$.

Лемма

Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathbf{I}\Delta_0 \vdash x \leq \underline{n} \leftrightarrow (x = \underline{0} \vee x = \underline{1} \vee \ldots \vee x = \underline{n})$.

Proof.

Индукция по n. База $n = 0$ следует из **O7** и **O8**. Переход из **D8**. $\square$

Схемы индукции

Определение

Ограниченная схема индукции для формул из Δ_0:
$\big(\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \supset \varphi(x+1))\big) \supset \varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — любая Δ_0 формула.

Схемы индукции

Определение

Ограниченная схема индукции для формул из Δ_0:
$(\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \supset \varphi(x+1))) \supset \varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — любая Δ_0 формула.

Теорема

В $\mathbf{I}\Delta_0$ можно заменить $\Delta_0 - \mathbf{IND}$ на ограниченную схему индукции для формул Δ_0.

Схемы индукции

Определение

Ограниченная схема индукции для формул из Δ_0:
$(\varphi(0) \wedge \forall x < z(\varphi(x) \supset \varphi(x+1))) \supset \varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — любая Δ_0 формула.

Теорема

В $\mathbf{I}\Delta_0$ можно заменить $\Delta_0 - \mathbf{IND}$ на ограниченную схему индукции для формул Δ_0.

Определение

Сильная схема индукции для $\varphi(x)$:

$$\forall x\big((\forall y < x\varphi(y)) \supset \varphi(x)\big) \supset \forall z\varphi(z).$$

Схемы индукции

Определение

Ограниченная схема индукции для формул из Δ_0:
$(\varphi(0) \land \forall x < z(\varphi(x) \supset \varphi(x+1))) \supset \varphi(z)$, где $\varphi(x)$ — любая Δ_0 формула.

Теорема

В $\mathbf{I}\Delta_0$ *можно заменить* $\Delta_0 - \mathbf{IND}$ *на ограниченную схему индукции для формул* Δ_0.

Определение

Сильная схема индукции для $\varphi(x)$:

$$\forall x\big((\forall y < x\varphi(y)) \supset \varphi(x)\big) \supset \forall z\varphi(z).$$

Теорема

$\mathbf{I}\Delta_0$ *доказывает сильную схему индукции для* Δ_0 *формул.*

Полиномиально-ограниченные теории

Определение

Терм $t(\vec{x})$ — **ограничивающий терм** для функционального символа $f(\vec{x})$ в $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x}\ f(\vec{x}) \leq t(\vec{x})$.

Полиномиально-ограниченные теории

Определение

Терм $t(\vec{x})$ — **ограничивающий терм** для функционального символа $f(\vec{x})$ в $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x}\ f(\vec{x}) \leq t(\vec{x})$.

Определение

Функциональный символ f **полиномиально ограничен** (или **p-ограничен**) в $\mathcal{T}$, если имеет ограничивающий терм в $\mathcal{L}_A$

Полиномиально-ограниченные теории

Определение

Терм $t(\vec{x})$ — **ограничивающий терм** для функционального символа $f(\vec{x})$ в $\mathcal{T}$, если $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x}\ f(\vec{x}) \leq t(\vec{x})$.

Определение

Функциональный символ f **полиномиально ограничен** (или **p-ограничен**) в $\mathcal{T}$, если имеет ограничивающий терм в $\mathcal{L}_A$

Определение

Пусть $\mathcal{T}$ — теория над языком $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{T}$ **полиномиально ограничена** (или **p-ограничена**), если

- $\mathcal{T}$ расширяет $\mathbf{I}\Delta_0$;
- $\mathcal{T}$ может быть аксиоматизирована ограниченными формулами;
- каждая функция $f \in \mathcal{L}$ полиномиально ограничена.

Теорема Париха

Теорема

Если $\mathcal{T}$ *— полиномиально-ограниченная теория и* $\varphi(\vec{x}, y)$ *— ограниченная формула со свободными переменными* $\vec{x}, y$ *такая, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y\varphi(\vec{x}, y)$*, тогда есть такой терм* t*, содержащий только переменные из* $\vec{x}$*, такой, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y \leq t\varphi(\vec{x}, y)$*.*

Теорема Париха

Теорема

Если $\mathcal{T}$ *— полиномиально-ограниченная теория и* $\varphi(\vec{x}, y)$ *— ограниченная формула со свободными переменными* $\vec{x}, y$ *такая, что* $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x} \exists y \varphi(\vec{x}, y)$, *тогда есть такой терм* t, *содержащий только переменные из* $\vec{x}$, *такой, что* $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x} \exists y \leq t \varphi(\vec{x}, y)$.

В дальнейшем мы узнаем, как выразить отношение $y = 2^x$ при помощи ограниченной формулы $\varphi_{exp}(x, y)$.

Теорема Париха

Теорема

Если $\mathcal{T}$ *— полиномиально-ограниченная теория и* $\varphi(\vec{x}, y)$ *— ограниченная формула со свободными переменными* $\vec{x}, y$ *такая, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y\varphi(\vec{x}, y)$*, тогда есть такой терм* t*, содержащий только переменные из* $\vec{x}$*, такой, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y \leq t\varphi(\vec{x}, y)$.

В дальнейшем мы узнаем, как выразить отношение $y = 2^x$ при помощи ограниченной формулы $\varphi_{exp}(x, y)$.
Из теоремы Париха следует, что

$$\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \forall x\exists y\varphi_{exp}(x, y).$$

Теорема Париха

Теорема

Если $\mathcal{T}$ *— полиномиально-ограниченная теория и* $\varphi(\vec{x}, y)$ *— ограниченная формула со свободными переменными* $\vec{x}, y$ *такая, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y\varphi(\vec{x}, y)$, *тогда есть такой терм* t, *содержащий только переменные из* $\vec{x}$, *такой, что* $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists y \leq t\varphi(\vec{x}, y)$.

В дальнейшем мы узнаем, как выразить отношение $y = 2^x$ при помощи ограниченной формулы $\varphi_{exp}(x, y)$.
Из теоремы Париха следует, что

$$\mathbf{I}\Delta_0 \nvdash \forall x\exists y\varphi_{exp}(x, y).$$

Замечание

Можно обобщить теорему Париха так: *если* φ *— ограниченная формула и* $\mathcal{T} \vdash \exists\vec{y}\varphi$, *тогда существует* $\mathcal{L}_A$*-термы* $t_1, \ldots, t_k$, *не содержащие переменные из* $\vec{y}$ *и свободные переменные из* φ, *такие, что* $\mathcal{T} \vdash \exists y_1 \leq t_1 \ldots \exists y_k \leq t_k\varphi$.

Расширения для структур

Определение

Пусть $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ — языки и $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — соответствующие структуры для них. Мы говорим, что $\mathcal{M}_2$ является **расширением** $\mathcal{M}_1$, если $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ имеют один и тот же универсум и одну и ту же интерпретация для символов из $\mathcal{L}_1$.

Расширения для структур

Определение

Пусть $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ — языки и $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — соответствующие структуры для них. Мы говорим, что $\mathcal{M}_2$ является **расширением** $\mathcal{M}_1$, если $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ имеют один и тот же универсум и одну и ту же интерпретация для символов из $\mathcal{L}_1$.

Обозначение

Обозначение $\exists! x \varphi(x)$ соответствует $\exists x,\ \varphi(x) \wedge \forall y (\varphi(y) \supset x = y)$, где y — новая переменная не встречающаяся в $\varphi(x)$.

Расширения для структур

Определение

Пусть $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ — языки и $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — соответствующие структуры для них. Мы говорим, что $\mathcal{M}_2$ является **расширением** $\mathcal{M}_1$, если $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ имеют один и тот же универсум и одну и ту же интерпретация для символов из $\mathcal{L}_1$.

Обозначение

Обозначение $\exists! x \varphi(x)$ соответствует $\exists x,\ \varphi(x) \wedge \forall y(\varphi(y) \supset x = y)$, где y — новая переменная не встречающаяся в $\varphi(x)$.

Обозначение

Обозначение $\exists! x \leq t \varphi(x)$, где t не содержит x, соответствует $\exists x \leq t,\ \varphi(x) \wedge \forall y \leq t(\varphi(y) \supset x = y)$, где y — новая переменная не встречающаяся в $\varphi(x)$ или t.

Представимые символы

Определение

Пусть $\mathcal{T}$ — теория над языком $\mathcal{L}$, а Φ — множество $\mathcal{L}$-формул.

1. Будем говорить, что предикатный символ $P(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в** $\mathcal{T}$, если существует формула $\varphi(\vec{x})$ в Φ такая, что $P(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$ (определяющая аксиома для $P(\vec{x})$).
2. Будем говорить, что функциональный символ $f(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в** $\mathcal{T}$, если существует формула $\varphi(\vec{x}, y)$ в Φ такая, что $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ и $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$ (определяющая аксиома для $f(\vec{x})$).

Представимые символы

Определение

Пусть $\mathcal{T}$ — теория над языком $\mathcal{L}$, а Φ — множество $\mathcal{L}$-формул.

1. Будем говорить, что предикатный символ $P(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в $\mathcal{T}$**, если существует формула $\varphi(\vec{x})$ в Φ такая, что $P(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$ (определяющая аксиома для $P(\vec{x})$).
2. Будем говорить, что функциональный символ $f(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в $\mathcal{T}$**, если существует формула $\varphi(\vec{x}, y)$ в Φ такая, что $\mathcal{T} \vdash \forall\vec{x}\exists! y\varphi(\vec{x}, y)$ и $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$ (определяющая аксиома для $f(\vec{x})$).

Определение

Символ **представим в $\mathcal{T}$**, если он Φ-представим в $\mathcal{T}$ для некоторого Φ.

Представимые символы

Определение

Пусть $\mathcal{T}$ — теория над языком $\mathcal{L}$, а Φ — множество $\mathcal{L}$-формул.

1. Будем говорить, что предикатный символ $P(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в** $\mathcal{T}$, если существует формула $\varphi(\vec{x})$ в Φ такая, что $P(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x})$ (определяющая аксиома для $P(\vec{x})$).
2. Будем говорить, что функциональный символ $f(\vec{x})$ не из $\mathcal{L}$ является **Φ-представим в** $\mathcal{T}$, если существует формула $\varphi(\vec{x}, y)$ в Φ такая, что $\mathcal{T} \vdash \forall \vec{x} \exists ! y \varphi(\vec{x}, y)$ и $y = f(\vec{x}) \leftrightarrow \varphi(\vec{x}, y)$ (определяющая аксиома для $f(\vec{x})$).

Определение

Символ **представим в** $\mathcal{T}$, если он Φ-представим в $\mathcal{T}$ для некоторого Φ.

Пример

$$Prime(x) \leftrightarrow 1 < x \wedge \forall y < x \forall z < x (y \cdot z \neq x).$$

Определение

Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — две теории, такие что $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, и язык $\mathcal{T}_2$ может иметь функциональные и предикатные символы не из $\mathcal{T}_1$. Будем называть $\mathcal{T}_2$ консервативным расширением $\mathcal{T}_1$, если для каждой формулы A над языком $\mathcal{T}_1$ из $\mathcal{T}_2 \vdash A$ следует $\mathcal{T}_1 \vdash A$.

Определение

Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — две теории, такие что $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, и язык $\mathcal{T}_2$ может иметь функциональные и предикатные символы не из $\mathcal{T}_1$. Будем называть $\mathcal{T}_2$ консервативным расширением $\mathcal{T}_1$, если для каждой формулы A над языком $\mathcal{T}_1$ из $\mathcal{T}_2 \vdash A$ следует $\mathcal{T}_1 \vdash A$.

Теорема (Расширение представимыми символами)

Если $\mathcal{T}_2$ получается из $\mathcal{T}_1$ расширением языка $\mathcal{T}_1$ при помощи представимых символов и определяющих аксиом для этих символов, то $\mathcal{T}_2$ — консервативное расширение $\mathcal{T}_1$.

Определение

Пусть $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — две теории, такие что $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, и язык $\mathcal{T}_2$ может иметь функциональные и предикатные символы не из $\mathcal{T}_1$. Будем называть $\mathcal{T}_2$ консервативным расширением $\mathcal{T}_1$, если для каждой формулы A над языком $\mathcal{T}_1$ из $\mathcal{T}_2 \vdash A$ следует $\mathcal{T}_1 \vdash A$.

Теорема (Расширение представимыми символами)

Если $\mathcal{T}_2$ получается из $\mathcal{T}_1$ расширением языка $\mathcal{T}_1$ при помощи представимых символов и определяющих аксиом для этих символов, то $\mathcal{T}_2$ — консервативное расширение $\mathcal{T}_1$.

Следствие

Пусть $\mathcal{T}$ — теория и $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1 \subset \dots$ — последовательность расширений $\mathcal{T}$, где каждая $\mathcal{T}_{n+1}$ получается из $\mathcal{T}_n$ добавлением представимых символов (в языке $\mathcal{T}_n$) и их определяемых аксиом. Пусть $\mathcal{T}_\infty = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$. Тогда $\mathcal{T}_\infty$ — консервативное расширение $\mathcal{T}$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.
3. Пусть $\mathcal{M}_1$ — модель $\mathcal{T}_1$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.
3. Пусть $\mathcal{M}_1$ — модель $\mathcal{T}_1$.
4. Расширим модель $\mathcal{M}_1$ до модели $\mathcal{M}_2$ теории $\mathcal{T}_2$, интерпретируя каждый символ так, что бы его соответствующая определяющая аксиома выполнялась (т. е. интерпретация однозначно определяется аксиомами).

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.
3. Пусть $\mathcal{M}_1$ — модель $\mathcal{T}_1$.
4. Расширим модель $\mathcal{M}_1$ до модели $\mathcal{M}_2$ теории $\mathcal{T}_2$, интерпретируя каждый символ так, что бы его соответствующая определяющая аксиома выполнялась (т. е. интерпретация однозначно определяется аксиомами).
5. Так как $\mathcal{M}_2$ — это модель $\mathcal{T}_2$, а значит $\mathcal{M}_2 \models A$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.
3. Пусть $\mathcal{M}_1$ — модель $\mathcal{T}_1$.
4. Расширим модель $\mathcal{M}_1$ до модели $\mathcal{M}_2$ теории $\mathcal{T}_2$, интерпретируя каждый символ так, что бы его соответствующая определяющая аксиома выполнялась (т. е. интерпретация однозначно определяется аксиомами).
5. Так как $\mathcal{M}_2$ — это модель $\mathcal{T}_2$, а значит $\mathcal{M}_2 \models A$.
6. Следовательно $\mathcal{M}_1 \models A$.

Доказательство

1. Пусть A — формула над языком $\mathcal{T}_1$.
2. Предположим, что $\mathcal{T}_2 \vdash A$.
3. Пусть $\mathcal{M}_1$ — модель $\mathcal{T}_1$.
4. Расширим модель $\mathcal{M}_1$ до модели $\mathcal{M}_2$ теории $\mathcal{T}_2$, интерпретируя каждый символ так, что бы его соответствующая определяющая аксиома выполнялась (т. е. интерпретация однозначно определяется аксиомами).
5. Так как $\mathcal{M}_2$ — это модель $\mathcal{T}_2$, а значит $\mathcal{M}_2 \models A$.
6. Следовательно $\mathcal{M}_1 \models A$.
7. Так как $\mathcal{M}_1$ — произвольная модель $\mathcal{T}_1$, то $\mathcal{T}_1 \vdash A$. $\square$