Проверяемое разделение секрета и передача данных вслепую

Лекция N 7 курса
“Современные задачи криптографии”

Юрий Лифшиц
yura@logic.pdmi.ras.ru

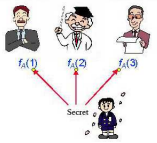
СПбГУ — SPRINT Lab

Осень’2005

План лекции

План лекции

Проверяемое разделение секрета



Формализация:

Разделить секрет $m \in [1..N]$ между n участниками
Любые t из них могут восстановить m
Любые $t-1$ из них НИЧЕГО не могут узнать про m

Дополнительное требование:

если раздающий нарушает протокол, честные участники смогут это обнаружить

Схема Шамира

Подготовительный шаг

Раздающий выбирает простое p, которое больше всех возможных секретов

Кодирование секрета

Выбираем $s_1, s_{t-1} \overset{\text{ran}}{\in} \mathbb{Z}_p$

Устанавливаем $s(x) \overset{def}{=} m + s_1 x + \cdots + s_{t-1} x^{t-1}$

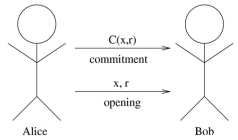
Раздача секрета

Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$

посылаем участнику i пару чисел $(i, s(i))$

Заставим раздающего доказать, что он действительно выдал правильные значения одного фиксированного полинома

Привязка к биту



Пусть p, q простые числа, $p = 2q + 1$. Мы будем рассматривать подгруппу квадратичных остатков ($a \equiv w^2$) по модулю p.

Факт: По данным g и h очень трудно определить такое x, что $g^x \equiv h(\mod p)$.

Построим на основе этого факта **гомоморфную** схему привязки к биту.

Гомоморфная привязка к биту

Подготовка: Боб объявляет $p = 2q + 1$, остатки g и h

Кодируем: $C(x, r) = g^x \cdot h^r$

Абсолютная секретность: $\forall y \exists q : g^x \cdot h^r = g^y \cdot h^q$

Вычислительная стойкость: нахождение q влечет вычисление дискретного логарифма:
$\log_g h = (x - y)/(q - r) \mod q$

Гомоморфность:
$$C(x, r) \cdot C(y, q) = C(x + y, r + q)$$

Старая схема

Подготовительный шаг

Фиксируем простое p и первообразный корень g

Привязка в два шага

Боб выбирает случайное q, посылает Алисе $y = g^q$

Алиса выбирает случайное r, посылает Бобу

$$C(b, r) = y^b g^r$$

В чем разница (кроме гомоморфности)?

Контроль над раздающим

1. Раздающий случайным образом выбирает коэффициенты $f = x + f_1 z + \cdots + f_{t-1} z^{t-1}$ и $f' = f'_0 + \cdots + f'_{t-1} z^{t-1}$
2. Раздающий публикует привязки для коэффициентов: $A_i = g^{f_i} \cdot h^{f'_i}$
3. Участнику номер i раздающий посылает $f(i), f'(i)$
4. Каждый участник выполняет проверку:
$$g^{f(i)} \cdot h^{f'(i)} = A_0 \cdot A_1^i \cdot A_2^{i^2} \cdot \cdots \cdot A_{t-1}^{i^{t-1}}$$
5. Если проверка не прошла, участник сообщает всем остальным

Участник считает раздающего жуликом, если:
его собственная проверка не прошла
было объявлено о t нарушениях
менее t участников не объявляли о нарушениях

План лекции

Постановка Рабина

- Два участника: передающий **S** и получающий **R**
- **S** посылает бит b по специальному каналу **R**
- С вероятностью $1/2$ **R** получает b
- С вероятностью $1/2$ **R** получает $\#$
- **S** не имеет никакой информации о том, что досталось **R**

Передача 1-из-2

Авторы: Even, Goldreich и Lempel

- Два участника: передающий **S** и получающий **R**
- У **S** есть два бита b_0 и b_1
- У **R** есть бит запроса i
- **R** должен получить b_i, но ничего не узнать о b_{1-i}
- **S** не должен узнать i

Схема Рабина $\Rightarrow$ 1-из-2 схема

Какие будут идеи?

1. **S** посылает **R** по схеме Рабина $3n$ битов $a_1, \ldots, a_{3n}$
2. **R** посылает две непересекающиеся группы индексов $i_1, \ldots, i_n$ и $j_1, \ldots, j_n$
3. **S** посылает **R** бита $c_0 = a_{i_1} \oplus \cdots \oplus a_{i_n} \oplus b_0$ и $c_0 = a_{j_1} \oplus \cdots \oplus a_{j_n} \oplus b_1$
4. Вероятность восстановления одновременно b_0 и b_1 экспоненциальна мала
5. **S** не может определить, для какой группы индексов **R** получил все значения

Схема 1-из-2 $\Rightarrow$ схема Рабина

Какие будут идеи?

1. Нужно передать бит b
2. **S** случайно выбирает a
3. С вероятностью $1/2$ запускаем 1-из-2 схему для пары (a, b)
4. С вероятностью $1/2$ запускаем 1-из-2 схему для пары (b, a)
5. **R** получает один из битов
6. **S** сообщает какой из вариантов 3 или 4 имел место.

Протокол для 1-из-2

Будем использовать **односторонние перестановки с секретом**

1. **S** сообщает одностороннюю функцию f **R**
2. **R** выбирает случайно x_i, считает $y_i = f(x_i)$ и выбирает случайное y_{1-i}
3. **R** посылает y_0 и y_1 **S**
4. **S** высылает $b_0 \oplus HCB(f^{-1}(y_0))$ и $b_1 \oplus HCB(f^{-1}(y_1))$
5. **R** может восстановить только один бит

Как заставить **R** выбрать y_{1-i} случайным образом?

Форсируем случайность битов

1. **R** выбирает случайно r_1, посылает $Q = C(r_1, R)$ для **S**
2. **S** присылает **R** другую случайную строку r_2
3. **R** использует $r_1 \oplus r_2$ в качестве y_{1-i}
4. **R** доказывает с **нулевым разглашением**:

$$\exists R \exists r_1 \exists i \ : \ Q = C(r_1, R) \ \& \ y_i = r_1 \oplus r_2$$

План лекции

Открытый вопрос от А.Куликова

Пусть есть граф из n вершин, степень каждой вершины не больше трех. Для какой наименьшей функции $f(n)$ всегда можно разбить вершины на две группы по $n/2$ так, чтобы между ними было не более $f(n)$ ребер?

Гипотеза: $f(n) = c \cdot n$ для некоторого c

Нижние оценки. Можете ли придумать граф, в котором в любом разрезе будет хотя бы $\log n$ ребер?

Задача имеет приложения в разработке эффективных алгоритмов

Последний слайд

Если не запомните ничего другого:

- Проверяемое разделение секрета основано на гомоморфной привязке к биту
- Два подхода к передаче данных вслепую: Модель Рабина и 1-из-2
- Использовали нулевое разглашение для передачи данных вслепую

Вопросы?