Броуновские мосты и ансамбли совместно ортогональных многочленов

А. И. Аптекарев
Институт Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН

АННОТАЦИЯ

Ансамбль Совместно Ортогональных Многочленов (СОМ) определяется на $\mathbb{R}^n$ функцией плотности вероятности следующего вида:

$$\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \prod_{j>i} (x_j - x_i) \det [\varphi_i(x_j)]_{i,j=1,\ldots,n} , \tag{1}$$

где линейная оболочка функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ такая же, что и у множества

$$\{x^k w_j(x) \mid k = 0, \ldots, n_j - 1, \, j = 1, \ldots, p\} .$$

Этот СОМ ансамбль порожден p весовыми функциями $w_1, \ldots, w_p$ и мультииндексом $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_p)$. Усредненный характеристический многочлен

$$P_{\vec{n}}(z) = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1} (z - x_j)\right]$$

(где математическое ожидание берется относительно плотности вероятности (1)) удовлетворяет соотношениям ортогональности

$$\int P_{\vec{n}}(x) x^k \, d\mu_j(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n_j - 1, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{2}$$

с мерами $d\mu_j(x) = w_j(x)dx$. Равенства (2) называют соотношениями совместной ортогональности, а $P_{\vec{n}}$ называется *совместно ортогональным многочленом.* Эти многочлены появились в теории рациональных приближений аналитических вектор функций, которая при этом была мотивирована теорией диофантовых приближений.

В последнее время важные примеры СОМ ансамблей появляются в теории случайных матриц и в теории непересекающихся случайных путей, таких как броуновские мосты, случайные матрицы с внешним источником, двухматричные модели и ансамбли нормальных случайных матриц. Доклад будет посвящен аналитическим аспектам и асимптотическому поведению этих моделей.