Алгоритм Тарского.

Ю. В. Матиясевич[*]

19 апреля 2004 г.

Введение

Довольно большой класс встречающихся в жизни математических задач может быть выражен на языке многочленов и неравенств. Про многочлены степени не выше четырех человечество уже довольно давно знало все - существовали формулы и методы нахождения их корней в радикалах, что позволяло оценить эти корни с любой требуемой точностью. Однако с помощью теории Галуа было показано, что для многочленов степени пять и выше таких формул не существует.

Но это затруднение не оказалось смертельным. В конце концов, для решения большинства задач совершенно необязательно знать радикальное выражение корня; достаточно лишь оценить его с приемлемой точностью. Через некоторое время был разработан алгоритм Штурма, позволяющий за конечное время определить число корней любого многочлена на любом заданном отрезке.

Не столь давно был создан значительно более мощный, буквально революционный алгоритм изучения многочленов, получивший имя Тарского. Изложение его основных идей и является целью данного конспекта.

Постановка задачи

Будем рассматривать логические формулы, составленные из переменных, рациональных чисел, операций сложения и умножения, знаков неравенств и равенства, унарных и бинарных логических операций (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция), а также кванторов всеобщности и существования. Кванторы считаются ограниченными полем вещественных чисел (или, что то же самое, переменные считаются вещественными). Пример такой формулы приведен ниже.

$$\left(\exists x\ \ ax^2+bx+c=0\right)\vee\neg\left(\forall x\ \ cx^2+a>0\right)$$

[*]Законспектировал А. Девский.

Легко видеть, что эта формула от четырех переменных (a, b, c, x) незамкнута. Она является неким условием на a, b и c. Алгоритм Тарского позволяет упростить это условие, сведя его к формуле аналогичного вида, но не содержащей x. Вообще говоря, алгоритм Тарского позволяет исключить из формулы все переменные, относительно которых она замкнута.

Оговоримся отдельно об ограничениях, наложенных на коэффициенты. Поле рациональных чисел выбрано только потому, что компьютер может быстро работать с ним без потери точности. Как легко понять, потеря точности при изучении многочлена критична, потому что набор корней зависит от набора коэффициентов не непрерывно (малые колебания коэффициентов могут привести к серьезным изменениям корней). На самом деле, класс полей, из которых берутся коэффициенты, можно существенно расширить.

Как, вероятно, уже догадался читатель, основная задача алгоритма Тарского состоит именно в исключении (элиминации) связанных переменных формулы.

Алгоритм Тарского для одной переменной.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Упрощение.

В этом разделе мы считаем, что в нашей формуле участвует всего одна переменная.

Прежде всего заметим, что любое неравенство или равенство двух многочленов можно вычитанием свести к неравенству или равенству между многочленом и нулем. Поэтому мы можем считать, что нас интересует только, принимает ли многочлен тот или иной знак.

Заметим, что значение предиката неравенства или равенства между многочленом и нулем постоянно на интервалах между его корнями (т.к. между соседними корнями многочлен, очевидно, сохраняет знак). Таким образом, если мы рассмотрим формулу без кванторов, составленную именно из таких предикатов, и опишем для нее множество всех корней всех многочленов из этой формулы, то значение этой формулы (из тех же соображений) будет постоянно на интервалах между соседними точками этого множества. Поэтому нам достаточно знать значение формулы лишь в конечном наборе точек - во всех корнях, в каких-то точках между ними, в точке левее всех корней и правее всех корней. Дя того, чтобы уметь считать в этих точках значения формулы, достаточно уметь считать в них значения исходных многочленов.

Можно упростить задачу, если к многочленам исходного набора $p_1, \ldots, p_n$ добавить $p = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_n)'$. В этом новом наборе можно обойтись без рассмотрения точек, лежащих между корнями набора, потому что между любыми двумя корнями исходного набора лежит корень p.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Насыщение.

Введем понятие насыщенной системы многочленов. Система многочленов T будет называться насыщенной, если:

1. $\forall p \in T\ (p \neq \mathrm{const}) \Rightarrow (p' \in T)$
2. $\forall p_1, p_2 \in T\ (p_2 \neq \mathrm{const}) \Rightarrow (p_1 \mathrm{mod} p_2 \in T)$

Здесь mod означает "остаток от деления на". Заметим, что любая конечная система вложена в какую-то конечную насыщенную. Иначе говоря, любую конечную систему можно насытить за конечное число шагов. Это связано с тем, что при насыщении (то есть при взятии производной и остатка) степень многочленов, участвующих в процессе, строго понижается.

Будем считать, что дальше алгоритм Тарского выполняется нами для насыщенной системы многочленов, упорядоченной по неубыванию степени. Насыщение исходного набора является первой основной частью алгоритма. Вторая часть - это построение таблицы. Напомним, что нас интересуют только значения многочленов набора в корнях этого набора, а также в точке левее всех корней и правее всех корней. Две последних точки обозначаются $-\infty$ и $+\infty$ соответственно. Строкам таблицы будут соответствовать многочлены набора, столбцам - корни набора, $-\infty$ и $+\infty$, а ячейкам - знаки соответствующих многочленов в соответствующих точках. Построение таблицы производится как в высоту, так и в ширину (т.е. добавляются и строки, и столбцы).

Алгоритм Тарского для одной переменной. Построение таблицы.

Пусть количество многочленов в насыщенной системе T равняется M, а количество корней этой системы R - N. Занумеруем многочлены в T и назовем их p_i. Напомним, что T занумеровано по неубыванию степени.

На каждом шаге k мы будем получать таблицу $\left(\alpha_{i,j}^{(k)}\right)_{i=1\,j=0}^{m_k\ n_k+1}$ размера m_k на n_k+2. С каждым столбцом $1 \leqslant j \leqslant n_k$ будет связан корень $x_j^{(k)} \in R$. Корни будут упорядочены по возрастанию. При этом $\forall i\ \forall 1 \leqslant j \leqslant n_k\ \alpha_{i,j}^{(k)} = = \mathrm{sign}(p_i(x_j^{(k)}))$, то есть ячейки таблицы соответствуют в точности знакам, которые принимают соответствующие многочлены в соответствующих точках. Назовем это основным свойством $\mathcal{M}$. Со столбцом 0 связана точка $-\infty$, а со столбцом n_k+1 - точка $+\infty$. Это условные точки, под которыми подразумевается поведение многочлена при приближении к тому или другому концу прямой. Напомним, что слева и справа от R все многочлены знакопостоянны, поэтому под $-\infty$ и $+\infty$ можно понимать также какие-то фиксированные точки слева и справа от R. Ячейки таблицы в этих столбцах определяются аналогично.

Таблица также обладает некоторыми техническими свойствами. Например, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n_k\ \exists 1 \leqslant i \leqslant m_k\ p_i(x_j^{(k)}) = 0$, то есть каждый добавленный в таблицу корень является корнем уже добавленного многочлена. Назовем это свойство $\mathcal{T}1$. Кроме того, для любого $i \leqslant m_k - 1$ в таблице содержатся все корни p_i (если p_i - не тождественный ноль). Назовем это свойство $\mathcal{T}2$.

Начнем, наконец, построение таблицы. Подговительный шаг заключается в добавлении всех констант. То есть m_0 - это число констант в T, а $n_0 = 0$, то есть в таблице только два столбца. Ячейки таблицы заполняются однозначно - константы знакопостоянны на всей прямой. Заметим, что таблица обладает всеми описанными выше свойствами: $\mathcal{M}$ - по построению, $\mathcal{T}1$ - потому что у нас еще не добавлено нетривиальных столбцов, $\mathcal{T}2$ - потому что у ненулевых констант вообще нет корней.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Построение таблицы. Дбавление столбцов.

Шаг начинается с проверки последней строчки. Нас интересует, не существует ли такое $0 \leqslant J \leqslant n_k$, что $\alpha^{(k)}_{m_k,J} \cdot \alpha^{(k)}_{m_k,J+1} = -1$, то есть соседние ячейки в последней строчке имеют противоположные знаки. В виду $\mathcal{M}$ это значит, что у последнего добавленного многочлена в каких-то соседних точках разные знаки. Поэтому на интервале $(x^{(k)}_J, x^{(k)}_{J+1})$ у p_{m_k} есть корень. Заметим, что этот корень ровно один - между двумя корнями многочлена лежит корень его производной, но производная p_{m_k} имеет степень строго меньше, чем он сам, поэтому уже добавлена в таблицу. Согласно $\mathcal{T}2$, все ее корни уже содержатся среди $x^{(k)}_j$, и, значит, на этом интервале им взяться неоткуда. Поэтому у p_{m_k} ровно один корень на этом интервале. Обозначим его $x^{(k+1)}_{J+1}$. Корни с номерами меньше $J+1$ остаются на месте при переходе в следующий шаг, остальные сдвигаются на номер вправо. То есть $x^{(k+1)}_j = x^{(k)}_j$ при $j \leqslant J$, и $x^{(k+1)}_j = x^{(k)}_{j-1}$ при $j > J+1$. Аналогичным образом переносятся в новую таблицу ячейки из старых столбцов. Таким образом, $m_{k+1} = m_k$, и $n_{k+1} = n_k + 1$.

Теперь нужно заполнить ячейки в новом столбце $J + 1$. Заметим, что ни для какого $i < m_k$ невозможна ситуация $\alpha^{(k+1)}_{i,J} \cdot \alpha^{(k+1)}_{i,J+2} = -1$ - это означало бы, что $\alpha^{(k)}_{i,J} \cdot \alpha^{(k)}_{i,J+1} = -1$, а ведь в этом случае у нас возник бы незарегистрированный корень p_i, и было бы нарушено свойство $\mathcal{T}2$. Более того, на интервале $(x^{(k+1)}_J, x^{(k+1)}_{J+2})$ все многочлены с номером меньше m_k знакопостоянны (по тем же соображениям). В довершение всего, ни у одного такого многочлена не может быть корней на обоих концах интервала - между ними был бы корень производной, а мы его не наблюдаем. Поэтому знак многочлена на интервале (то есть $\alpha^{(k+1)}_{i,J+1}$) однозначно восстанавливается по информации из таблицы (хотя бы на одном конце интервала знак нетривиален, а на самом интервале многочлен знакопостоянен). Таким образом заполняется весь столбец, и мы получаем новую таблицу. Шаг на этом завершен.

Полученная на $k+1$-ом шаге таблица отвечает свойству $\mathcal{M}$ по построению, свойству $\mathcal{T}1$ - по очевидным причинам (единственный новый столбец соответствует корню многочлена m_{k+1}), и свойству $\mathcal{T}2$ - потому что не было добавлено новых многочленов.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Построение таблицы. Дбавление строк.

Если же в последней строчке нет соседних ячеек с противоположными знаками, то новая таблица создается добавлением очередной строчки. То есть $m_{k+1} = m_k + 1$, и $n_{k+1} = n_k$. При этом старая таблица "вкладывается"в новую, то есть $\forall 1 \leqslant i \leqslant m_k \quad \forall 0 \leqslant j \leqslant n_k + 1 \quad \alpha_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_{i,j}^{(k)}$. Корни, соответствующие столбцам, остаются прежними: $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}$. Осталось заполнить ячейки последней строчки, то есть найти знак нового многочлена в уже имеющихся точках.

Рассмотрим точку $+\infty$. Она соответствует некоему лучу, на котором многочлен знакопостоянен. Известно, что непостоянный многочлен (а наш многочлен непостоянный, все константы мы уже добавили) в бесконечности уходит на бесконечность. Отсюда ясно, что, если он на этом луче возрастает, то он уходит на $+\infty$, а если убывает, то на $-\infty$. Заметим, что наш многочлен монотонен на этом луче, потому что его производная принадлежит T, а все многочлены из T знакопостоянны на этом луче. Таким образом, знак многочлена в $+\infty$ совпадает со знаком его производной в той же точке, а производная уже находится в таблице. Из аналогичных соображений знак многочлена в $-\infty$ обратен знаку его производной.

Рассмотрим теперь корень $x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)}$. Согласно свойству $\mathcal{T}1$, эта точка является корнем какого-то многочлена p_i, где $1 \leqslant i \leqslant m_k$. Мы знаем, что остаток от деления p_{m_k+1} на p_i содержится в T. Это некий p_I. Таким образом, $p_{m_k+1} = p_i q + p_I$, где q - частное от их деления. Если подставить в это равенство рассматриваемую точку, то окажется, что $p_{m_k+1}(x_j^{(k)}) = p_I(x_j^{(k)})$, по выбору p_i. По свойству остатка от деления $\deg p_I < \deg p_i$, поэтому p_I уже содержится в таблице. Значит, и его знак в нужной точке мы знаем. Значит, мы знаем и знак p_{m_k+1}. Таким образом заполняется вся новая строчка.

Обладает ли полученная таблица нужными свойствами? Она обладает $\mathcal{M}$ по построению и $\mathcal{T}1$ - потому что не было добавлено новых корней. Дя проверки $\mathcal{T}2$ достаточно проверить, что мы нашли все корни p_{m_k}. Мы знаем, что в строчке с номером m_k не было подряд идущих противоположных знаков. Заметим, что на каждом интервале между соседними точками многочлен строго монотонен (по соображениям, неоднократно изложенным выше: на интервале нет корней производной). Но строго монотонный на интервале многочлен, неотрицательный на обоих его концах, не может иметь на нем корней. Аналогично обстоит дело с неположительностью. Значит, ни на одном из интервалов p_{m_k} корней не имеет, и свойство $\mathcal{T}2$ установлено.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Завершение.

Алгоритм завершается, когда кончаются многочлены в T. Заметим, что это произойдет за конечное время - размер таблицы на каждом шаге возрастает, а ее конечный размер не больше $M(N+2)$. На самом деле, он ему равен, потому что ввиду рассуждений из предыдущего абзаца в таблицу добавлены все корни всех многочленов, то есть все множество R. Имеющаяся конечная таблица позволяет быстро проверять истинность любой формулы, содержащей многочлены из T. Так, для проверки утверждения $\exists x \;\; p_i(x) = 0$ достаточно посмотреть на i-ую строчку таблицы и определить, есть ли в ней нули.

Алгоритм Тарского для одной переменной. Замечание и пример.

Заметим, что данное выше определение насыщенной системы можно ослабить. В самом деле, нас интересует такая система$T = (p_i)|_{i=1}^{N}$, где многочлены упорядочены по неубыванию степени, в которой для каждого непостоянного многочлена есть его производная и $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant N$ есть остаток от деления p_j на p_i, если p_i - не константа. Упрощение состоит в том, что теперь необязательно делить все многочлены одинаковой степени друг на друга. А для нужд алгоритма такая система вполне сойдет.

Для примера рассмотрим многочлен $x^3 + x + 1$. Насыщенная система, порождаемая этим многочленом, содержит 10 элементов:

$$-9,\; -\frac{31}{8},\; \frac{2}{3},\; 1,\; 6,\; \frac{31}{4},\; \frac{2}{3}x + 1,\; 6x,\; 3x^2 + 1,\; x^3 + x + 1$$

Читатель легко убедится в этом сам. На нулевом шаге таблица выглядит так:

	$-\infty$	$+\infty$
-9	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$
1	$+$	$+$
6	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$

Последняя строчка не содержит перепадов знака, поэтому мы добавляем следующий многочлен $\frac{2}{3}x + 1$. Его производная $2/3$, это задает его знаки.

	$-\infty$	$+\infty$
-9	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$
1	$+$	$+$

6	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	$+$

Легко видеть, что в последней строчке есть перепад знаков. Поэтому мы добавляем новый корень x_1.

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$

Все возможные корни добавлены, поэтому добавляем новую строчку $6x$. Ее краевые значения ясны. Чтоб посчитать значение в x_1, следует поделить $6x$ на $\frac{2}{3}x+1$. Остаток будет -9.

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$
$6x$	$-$	$-$	$+$

В последней строке есть перепад. Введем корень x_2.

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$6x$	$-$	$-$	0	$+$

Больше перепадов нет. Добавляем строку $3x^2+1$. Ее значения в краевых точках определяются производной $6x$. Значение в x_1 - остатком от деления на $\frac{2}{3}x+1$, многочленом $\frac{31}{4}$, а значение в x_2 - остатком от деления на $6x$, то есть 1.

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$6x$	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2+1$	$+$	$+$	$+$	$+$

Что характерно, полученный результат согласуется с реальностью - у $3x^2+1$ нет вещественных корней. Перепадов знака нет, поэтому добавляем последнюю строку, x^3+x+1. Производная $3x^2+1$, остаток от деления на $\frac{2}{3}x+1$ - это $-\frac{31}{8}$, остаток от деления на $6x$ - это 1.

	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$6x$	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2+1$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^3+x+1	$-$	$-$	$+$	$+$

Добавляем корень x_3.

	$-\infty$	x_1	x_3	x_2	$+\infty$
-9	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$-31/8$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2/3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
6	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$31/4$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2/3x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$6x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x^2+1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^3+x+1	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Полученная таблица умеет отвечать на все вопросы про x^3+x+1. Как побочный результат, мы получаем даже оценку на его единственный корень: $x_1 < x_3 < x_2$, а ведь $x_1 = -\frac{3}{2}$ и $x_2 = 0$ (их мы можем легко вычислить в явном виде).

Алгоритм Тарского в общем виде.

Теперь нам предстоит решить ту же задачу, но в общем виде, допуская наличие многочленов от произвольного числа переменных. Для этого мы будем производить элиминацию кванторов. Действительно, истинность формулы, не содержащей кванторов, является явной функцией от свободных переменных и устанавливается прямым подсчетом.

Читатель, вероятно, уже догадался, что в некотором смысле мы сведем задачу к уже решенной. Это действительно так. Пусть нам дана система $T \subset \mathbb{Q}[x, x_1, \ldots, x_n]$, причем переменная x - связанная (остальные нас сейчас не интересуют). Рассмотрим наше кольцо многочленов как $(\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n])\,[x]$. Это кольцо многочленов от одной переменной с коэффициентами из кольца многочленов от n переменных. Однако такое представление нас не устраивает - чтобы делить с остатком, нам нужно кольцо многочленов над полем, а не над кольцом. Естественно рассмотреть поле частных $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, а именно $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ - поле рациональных функций. Итак, мы считаем, что $T \subset (\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n))\,[x]$.

Казалось бы, все хорошо. Но для выполнения алгоритма Тарского для одной переменной нам нужно линейно упорядоченное поле! Вот тут-то и начинается самое интересное - разбор случаев. Поясним это на несложном примере.

Алгоритм Тарского в общем виде. Несложный пример.

Рассмотрим формулу от трех свободных переменных с одним квантором $\exists x \;\, ax^2 + bx + c = 0$. Эта формула означает "при каких коэффициентах квадратное уравнение имеет корень?". Попытаемся построить на основе этого многочлена насыщенную систему. Его производная $2ax + b$ явно будет лежать в ней, наряду со второй производной $2a$. Если мы попытаемся поделить $ax^2 + bx + c$ с остатком на $2ax + b$, мы столкнемся с затруднением: результат качественно зависит от того, равно ли a нулю. Поэтому мы проводим разбор случаев.

- $a = 0$

  Тогда многочлен $2ax+b$ - константа (напомним, нас интересует только зависимость от x), и на него не надо делить с остатком. Собственно, система уже насыщена - она содержит лишь $bx + c$ и b. Построим для нее таблицу. Но первый же шаг натыкается на трудность: мы не знаем знак константы b! Поэтому мы опять делаем разбор случаев.

  ч $(a = 0) \wedge (b > 0)$

    Таблица выглядит так:

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
b	$+$	$+$	$+$
$bx+c$	$-$	0	$+$

Значит, при данных предположениях формула верна. Запомним это.

- ч $(a=0)\wedge(b=0)$

  Многочлен $bx+c$ оказывается константой c, знак которой нам также неизвестен. Разбор случаев (мы не будем его приводить здесь за тривиальностью) действительно показывает, что формула верна лишь при $c=0$. Запомним это.

- ч $(a=0)\wedge(b<0)$

  Результат аналогичен случаю $b>0$. Запомним это.

- $a\neq 0$

Теперь мы можем делить ax^2+bx+c на $2ax+b$. Остаток будет равен $c-\frac{b^2}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. Не правда ли, числитель напоминает давно известную школьную формулу? Это не случайно. Система теперь состоит из четырех элементов: $\frac{4ac-b^2}{4a}$, $2a$, $2ax+b$, ax^2+bx+c. Чтобы построить таблицу, нам нужно знать знаки констант.

- ч $(a\neq 0)\wedge(\frac{4ac-b^2}{4a}>0)$

  Формально нам нужно разбирать также три случая знака $2a$ - мы ведь "не знаем", что его знак совпадает со знаком a. Однако мы сделаем вид, что нам это все-таки известно и ограничимся двумя случаями (исключительно для экономии места).

  * $(a\neq 0)\wedge(\frac{4ac-b^2}{4a}>0)\wedge(2a>0)$

	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$(4ac-b^2)/4a$	$+$	$+$	$+$
$2a$	$+$	$+$	$+$
$2ax+b$	$-$	0	$+$
ax^2+bx+c	$+$	$+$	$+$

  Мы видим, что наша формула неверна при данных предположениях. Забудем их.

  * $(a\neq 0)\wedge(\frac{4ac-b^2}{4a}>0)\wedge(2a<0)$

	$-\infty$	x_2	x_1	x_3	$+\infty$
$(4ac-b^2)/4a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2a$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$2ax+b$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
ax^2+bx+c	$-$	0	$+$	0	$-$

  Формула верна. Запомним предположения.

- ч $(a\neq 0)\wedge(\frac{4ac-b^2}{4a}=0)$

  Разбор этого случая аналогичен: формула истинна при любом знаке $2a$.

ч $(a \neq 0) \wedge (\frac{4ac-b^2}{4a} < 0)$
Разбор этого случая аналогичен: формула истинна только при $2a > 0$.

Разбор случаев закончен. Итоговая функция от a, b и c выглядит так:

$$\left[\begin{array}{l} (a=0) \wedge (b>0) \\ (a=0) \wedge (b=0) \wedge (c=0) \\ (a=0) \wedge (b<0) \\ (a \neq 0) \wedge (\frac{4ac-b^2}{4a} > 0) \wedge (2a<0) \\ (a \neq 0) \wedge (\frac{4ac-b^2}{4a} = 0) \\ (a \neq 0) \wedge (\frac{4ac-b^2}{4a} < 0) \wedge (2a>0) \end{array}\right.$$

Это вполне соответствует нашим представлениям о корнях квадратного уравнения.

Алгоритм Тарского в общем виде. Комментарий.

Как мы видели, алгоритм Тарского в общем виде действительно сводится к разбору случаев и выполнению для каждого случая алгоритма Тарского для одной переменной. Разбор случаев бывает двух видов: при построении насыщенной системы мы разбираем случаи равенства или неравенства нулю старших коэффициентов (для корректного выполнения деления с остатком), а при построении таблицы - случаи, соответствующие знакам констант. Никаких других случаев разбирать не надо, поскольку при наличии насыщенной системы и знаков констант алгоритм Тарского для одной переменной способен работать "автономно", используя исключительно данные, имеющиеся в таблице и ничего больше.

Следует отметить, что время работы алгоритма Тарского чудовищно велико. В предыдущем примере из одного равенства с квантором мы получили дизъюнкцию шести конъюнкций. А если бы в исходной формуле было больше кванторов? При каждой элиминации сложность формулы возрастает очень сильно.

Однако прелесть алгоритма Тарского не в том, что он работает быстро или медленно, а в том, что он работает, причем за конечное время. Долгое время считалось, что существование подобного алгоритма невозможно вообще, поэтому его создание действительно стало своего рода революцией. И при всей своей мощи алгоритм довольно изящен и не столь сложен к изложению.