

### Задачи по теории алгоритмов

1. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.
2. Докажите, что непустое подмножество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно есть множество значений всюду определенной неубывающей вычислимой функции с натуральными аргументами и значениями.
3. Приведите пример неразрешимого подмножества  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с  $\mathbb{N} \times \{x\}$  и с  $\{x\} \times \mathbb{N}$ ) разрешимы.
4. Постройте множество, которое не является перечислимым и его дополнение тоже не является перечислимым.
5. Докажите, что вещественное число  $\alpha$  является вычислимым тогда и только тогда, когда множества  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\}$  и  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x > \alpha\}$  являются разрешимыми.
6. Докажите, что существует машина Тьюринга, которая принимает квадрат своего номера, а все остальные входы отвергает.
7. Докажите, что существует два различных алгоритма  $A$  и  $B$ , что  $A$  печатает номер  $B$ , а  $B$  печатает номер  $A$ .
8. Докажите, что предикат  $p$  —  $n$ -ое простое число арифметичен.
9. Обозначим  $K(x)$  минимальный номер машины Тьюринга, которая на пустом входе печатает  $x$  и останавливается. Докажите, что функция  $K(x)$  не является вычислимой.
10. Существует ли алгоритм, проверяющий, работает ли данная машина Тьюринга полиномиальное время?
11. Арифметично ли множество номеров алгоритмов, которые останавливаются хотя бы на одном входе?
12. Постройте явно универсальные  $\Sigma_n$  и  $\Pi_n$  множества.
13. Покажите, что для любого  $N$  множество всех истинных замкнутых арифметических формул, содержащих не более  $N$  кванторов, арифметично.
14. Пусть свойство пар натуральных чисел  $R(x, y)$  принадлежит  $\Sigma_n$ . Докажите, что свойство  $S(x) = (\forall y \leq x)R(x, y)$  тоже принадлежит  $\Sigma_n$ .
15. Докажите, что нет алгоритма, который бы проверил, верно ли, что данная машина Тьюринга работает на входе длины  $n$  не более, чем  $100n^2 + 200$  шагов.