Задачи по теме «Вероятностный метод»

$\boxed{\textbf{1.}}$ Пусть $W(r,k)$ — это наименьшее число n, что любая раскраска $\{1,2,\ldots,n\}$ в r цветов существует одноцветная арифметическая прогрессия длины k. Докажите, что а) $W(2,k) > 2^{k/2}$; б) $W(2,k) > \frac{2^k}{2ek}$

$\boxed{\textbf{2.}}$ Докажите, что если $C_n^k(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то существует турнир из n команд, в котором для любых k команд существует команда, которая выиграла у всех этих k.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Рассмотрим множество всех пар (A,B) непересекающихся k-элементных подмножеств $\{1,2,\ldots,n\}$. Множество Y отделяет пару (A,B), если $A \subseteq Y$ и $B \cap Y = \emptyset$. Докажите, что существует $l = 3k4^k \ln n$ множеств, что каждая пара (A,B) отделима хотя бы одним из них.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Докажите, что если в графе степень каждой вершины как минимум d, то в этом графе есть вершинное покрытие (такое множество вершин, что любое ребро имеет конец там) размера не больше, чем $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Есть k человек, каждый выбирает случайное число от 1 до n. Найдите математическое ожидание количество различных чисел.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Пусть Ω — равномерное вероятностное пространство (все исходы равновероятны). $X : \Omega \to \{1,2,\ldots,M\}$ — случайная величина. Пусть $\mathrm{E}\,X = M - a$. Докажите, что для всех $1 \le b \le M$ выполняется неравенство $\Pr[X \ge M-b] \ge \frac{b-a}{b}$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Докажите, что в случайном турнире на n вершинах с вероятностью $\Omega(n^{-3/2})$ в нем хотя бы $n!2^{-n}$ Гамильтоновых путей.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство k-элементных множеств, каждая точка входит ровно в k множеств и $k \ge 10$. Докажите, что элементы можно правильным образом покрасить в 2 цвета (во всех множествах $\mathcal{F}$ должны присутствовать оба цвета).

$\boxed{\textbf{9.}}$ Докажите обобщенную локальную лемму Ловаса. $G(V,E)$ — это граф зависимостей событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть существуют вещественные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $0 \le x_i < 1$, что для всех i, $\Pr[A_i] \le x_i \prod_{(i,j)\in E}(1-x_j)$. Тогда $\Pr[\overline{A}_1 \ldots \overline{A}_n] \ge \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ Пусть $\mathcal{F}$ — это семейство множеств, в каждом из которых не меньше $k \ge 2$ точек. Также предположим, что для каждой точки v, $\sum_{S\in\mathcal{F}:v\in S}(1-\frac{1}{k})^{-|S|}2^{-|S|+1} \le \frac{1}{k}$. Докажите, что элементы можно правильным образом покрасить в 2 цвета (во всех множествах $\mathcal{F}$ должны присутствовать оба цвета).