Рецензия к материалам на тему "Marked Ancestor Problems"

В качестве источника используется статья "Marked Ancestor Problems"(STEPHEN ALSTRUP, THORE HUSFELDT AND THEIS RAUHE).

1 Основная постановка задачи

Рассмотрим следующую структуру - корневое дерево на n вершинах, допускающее следующие операции:

1. mark(v): пометить вершину v,
2. unmark(v): снять метку с вершины v,
3. firstmarked(v): вывести первую помеченную вершину на пути от v к корню.

2 Основные определения и результаты

Будем работать в предположениях cell probe model - модели вычислений, в которой все операции свободны, за исключением доступа к памяти.

Одним из основных результатов статьи является следующая нижняя оценка:

Утв. Пусть t_u худшее время требуемое на обновление, а t_q худшее время на запрос соответственно в cell-probe модели с ячейками в b битов, тогда верно:

$$t_q = \Omega(\frac{log(n)}{log(t_u blog(n))})$$

Введем следующие обозначения:

1. Раскраска $e : V \to \{0, 1\}$
2. $e|_W$ - раскраска на множестве $W \subset V$
3. $F = \{e\}$
4. $F^W = \{e|_W\}$
5. W_i - множество вершин на iом уровне дерева
6. u - последовательность запросов над семейством запросов U
7. Если e^I - исходная раскраска дерева, то e^u - раскраска, полученная в результате выполнения последовательность запросов u
8. Пусть P - распределение на U. Таким образом распределение на $F : P(e) = \sum_{e^u=e} P(u)$. Распределение будем называть равномерным на F_u и $F_u^{W_i} \forall i$

Опр. Если M - память, тогда будем говорить, что $h \in M$ - регистр возраста не более, чем x, если его перезапись происходила менее, чем x времени назад.

Опр. Введем сдедующее отношение эквивалентности $M \sim_x M' \Leftrightarrow$ все ячейки возраста не более x, совпадают.

Опр. Будем обозначать содержимое регистров после применения последовательности запросов u, как $M[u]$. И тогда введем следующее множество: $Z(u, x, W) = \{e^{u'}|_W : u' \in U, M[u] \sim_x M[u']\}$ - то есть множество раскраскрасок, получаемых в результате применения различных последовательностей запросов, совпадающих в смысле состояний регистров с раскраской e^u на множестве W.

Опр. Для iого запроса, будем называть ранними состояния, обрабатываемые в числе $log(n)$ первых. Тогда R - множество регистров, которые могут быть ранними. Отметим, что $log(R) \in O(blog(n))$. И введем константу $C = b + log(R)$.

Фиксируем x. Введем отношение эквивалентности на множесте раскрасок: $e_1 \sim_x e_2 \Leftrightarrow u_1, u_2 : e_1 = e^{u_1}|_W, e_2 = e^{u_2}|_W, M[u_1] \sim_x M[u_2]$. Таким образом $Z(u, x, W)$ - какой-то класс эквивалентности для этого отношения.

Далее приведем Лемму, яявляющуюся опорной для многих результатов статьи.

Лемма5. Пусть распределение на U равномерно относительно F, тогда для каждого слоя вершин W и $x > 0$:

$$P(|Z(u, x, W)| \geq \frac{|F^W|}{2^{Cx+1}}) \geq \frac{1}{2}$$

Далее рассматриваются различные типы разметки дерева. И при помощи Леммы5 доказываются различные оценки.

3 Заключение

В качестве основных результатов в статье приводятся верхние и нижние оценки, доказательство их оптимальности для обширного множества задач - подробный список можно найти в разделе Aplications.