Рецензия на доклад

Морфизм 2 изображений планарных графов

1 Постановка задачи

Пусть даны два изображения графа (с прямыми непересекающимися рёбрами). Хотим найти последовательность морфизмов, переводящую одно изображение в другое. Для этого сначала нужно определить сами морфизмы, прямолинейное планарное изображение и топологическую эквивалентность.

Определение. Пусть Γ_0 и Γ_1 – два изображения одного и того же графа G. Морфизм – набор изображений Γ_t ($t \in [0,1]$), изменяющихся непрерывно по t.

Морфизм сохраняет свойство, если все промежуточные изображения им обладают.

Определение. Линейный морфизм – морфизм, сохраняющий планарность и прямоту рёбер, при котором каждая вершина движется с постоянной скоростью в некотором направлении.

Однонаправленный морфизм – когда все направления параллельны.

Определение. Прямолинейное планарное изображение графа – отображение, сопоставляющее вершинам точки плоскости, а рёбрам – отрезки между вершинами. При этом рёбра не должны пересекаться.

Его грань – компонента связности плоскости после удаления всех частей графа. Внешняя грань – неограниченная грань.

Определение. Два прямолинейных планарных изображения связного графа топологически эквивалентны, если порядок рёбер при обходе вершины по часовой стрелке совпадает и порядок вершин на внешней грани совпадает.

Определение. Два прямолинейных планарных изображения несвязного графа топологически эквивалентны, если изображения компонент связности топологичеси эквивалентны и компоненты связности вложены в одни и те же грани.

После этого на докладе была сформулирована следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть G – планарный граф на n вершинах, а Γ_1 и Γ_2 - два его прямолинейных планарных изображения, которые топологически эквивалентны. Тогда существует последовательность из $O(n)$ однонаправленных морфизмов, переводящая Γ_1 в Γ_2. Кроме того, она может быть найдена за время $O(n^3)$.*

После этого была определена триангуляция.

2 План решения

Введем несколько определений:

Определение. Триангуляция – прямолинейное планарное изображение максимального планарного графа. Вершины внешней грани триангуляции – граничные, остальные – внутренние.

Определение. Овыпуклениe четырёхугольника: пусть Γ – триангуляция графа. Пусть $abcd$ – четырёхугольник в Γ, внутри которого нет вершин, и снаружи которого не проходят рёбра ac и bd. Эта операция делает четырёхугольник выпуклым.

Определение. Ядро многоугольника – множество точек внутри его замыкания, из которых виден весь многоугольник. Свойства: v лежит в ядре $\Delta(v)$ ядро многоугольника выпукло

Определение. Стягивание: пусть Γ – триангуляция графа. Пусть v – вершина в нём, а u – её сосед, лежащий в ядре $\Delta(v)$. Стягивание v к u оставляет все вершины, кроме v, на месте, а v переводит в u.

Далее доказательство будет иметь следующий вид:

1. сделать из двух изображений две топологически эквивалентные триангуляции
2. преобразовать одну триангуляцию к другой
3. реализовать овыпуклениe четырёхугольника
4. превратить стягивание в однонаправленный морфизм