Рецензия на доклад "Planar Separators"

20 марта 2019 г.

Пусть нам дан планарный граф. Перед нами стоит задача разбить этот граф, путем выкидывания вершин, на две несвязные части.

Теорема 1 (Липтон-Тарьян)**.** *Пусть G - планарный граф на $n > 0$ вершинах. Тогда существует разбиение (A, B, C) такое, что $|A|, |B| \leqslant \frac{2}{3}n$, $|C| \leqslant 2\sqrt{2n}$, где A и B несвязны. C называется сепаратором (разделителем).*

Схема доказательства. Предполагаем, что граф G без петель и кратных рёбер, триангулирован и $n \geqslant 3$. Фиксируем $k = \lceil \sqrt{2n} \rceil$. Пусть дан цикл C, через $A(C)$ обозначим все вершины графа, находящиеся внутри цикла C, а через $B(C)$ - снаружи цикла C. Выберем цикл C, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $|V(C)| \leqslant 2k$;
2. $|B(C)| < \frac{2}{3}n$;
3. $|A(C)| - |B(C)|$ минимально.

Тогда этот цикл будет сепаратором.

Основной теоремой данного доклада была следующая.

Теорема 2. *Пусть G - планарный граф без петель и кратных рёбер на n вершинах на сфере Σ. Тогда существует простая замкнутая кривая $F \subseteq \Sigma$ такая, что*

1. $F \cap G \subseteq V(G)$;

2. $n_1 + \frac{n_3}{2} \leqslant \frac{2}{3}n$;

3. $n_2 + \frac{n_3}{2} \leqslant \frac{2}{3}n$*;*

4. $n_3 \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2n}$*;*

где n_3 *- количество вершин, которые пересекла кривая* F *(в дальнейшем - её длина), а* n_1, n_2 *- вершины, которые принадлежат дискам, полученным в результате разделения* Σ *кривой* F*. Аналогично* F *называется сепаратором.*

Далее эту теорему можно обобщить на графы с весами.

Теорема 3. *Пусть* G *- планарный граф на* Σ*, пусть для любой вершины* v *определён вес* $w(v) \in \mathbb{R}_+$*. Тогда существует петля* F *(с условиями из теоремы 2) длины* $l \leqslant \frac{3}{2}\sqrt{2n}$ *такая, что*

$$w((D \backslash F) \cap V(G)) + \frac{1}{2}w(F \cap V(G)) \leqslant \frac{2}{3}w(V(G)) \quad (1)$$

для обоих дисков D*.*

Теорема 4. *Пусть* G *- планарный граф на* Σ*. Пусть* $k \geqslant 2\sqrt{n} - 1$ *некоторое целое число. Пусть* F^* *петля длины* $l \leqslant k$ *и такая, что*

$$|(D \backslash F^*) \cap V(G)| + \frac{1}{2}|F^* \cap V(G)| \leqslant \frac{2}{3}|V(G)|$$

для обоих D*. Тогда*

1. *Не существует majority порядка* k*;*
2. *Для любой функции* $w : V(G) \to \mathbb{R}_+$ *существует петля* F *длины* $l \leqslant k$ *такая, что верно (1);*
3. *Для любой функции* $w : E(G) \to \mathbb{R}_+$ *такой, что* $\forall f \in E(G)$ *верно* $w(f) \leqslant \frac{2}{3}w(E(G))$*, существует петля* F *длины* $l \leqslant k$ *такая, что* $w(E(G) \cap D) \leqslant \frac{2}{3}w(E(G))$ *для любого диска* D*.*

Суть последней теоремы в том, что если у нас есть сепаратор, размер которого оценивается при помощи $\lambda \geqslant 2$ (то, что стоит перед $\sqrt{n}$), то с этой же константой есть сепаратор в взвешанном графе.