Рецензия к докладу «Mixing time и длинные пути в графах»

Докладчик: Блинова Дарья
Оппонент: Лялина Альбина

Дата доклада: 24/04/2019

Основные определения

Для того, чтобы определить понятие Mixing time, введем следующие определения. Везде далее мы изучаем D-регулярный граф G на n вершинах.

Определение 1. *Q_i^t будет обозначать распределение вероятностей на множестве вершин при случайном блуждании $W(G)$ после t шагов из вершины $i \in [n]$.*

Определение 2. *Общее расстояние изменения это*

$$||Q_i^t - U|| := \max_{A \subset [n]} |Q_i^t(A) - \frac{|A|}{n}| = \frac{1}{2} \sum_{j \in [n]} |Q_i^t(j) - \frac{1}{n}|,$$

где U - равномерное распределение на n точках.

Определение 3. *Случайное блуждание $W(G)$ смешивается через k шагов, если $\forall i \in [n]$*
$||Q_i^k - U|| < 1/4$.

Определение 4. *Минимальное такое k это и есть mixing time графа G (обозначаем $mix(G)$).*

Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $mix(G) = k$ и $D > 8k^2$, тогда G содержит путь длины $l > \frac{n}{16k}$.*

Доказательство. (Идея) Доказательство по индукции. Фиксируем v_0 и построим v_{i+1} как k-ый шаг некоторого случайного блуждания начинающегося в v_i. Таким образом, мы как бы разбиваем наш путь на кусочки по k вершин. Если $l < \frac{n}{16k}$, то каждый раз вероятность того, что путь можно продлить без самопересечений будет положительна. ☐

Теорема 2. *Дополнительно предположим, что G - простой граф, $D > 8k^2$ и $||Q_v^k - U|| < \varepsilon$ хотя бы для $(1-v)n$, где $0 < \varepsilon + v < 1/4$. Тогда G содержит путь длины $l > \frac{n}{16k}$.*

Замечание. При $v = 0$ получаем Теорему 1.

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 1. ☐

Введем еще несколько определений для формулировки третьей теоремы.

Определение 5. *Пусть* $H = (S, I)$, $deg := deg(H) = max_{s \in S}(deg(s))$. *Также пусть* $f : I \to \mathcal{N}$ *целочисленная функция на ребрах.* H_f *граф, полученный из* H *следующим образом:*

$$\forall (s, s') \in I \rightsquigarrow f(s, s')$$

H_f *называется* <u>*расширением*</u> H *по* f.

$$|f| := \sum_{(s,s') \in I} f(s, s')$$

$$min(f) := \min_{(s,s') \in I} f(s, s')$$

Замечание. Если $min(f) = 0$, то $f(s, s') = 0 \forall (s, s') \in I, |f| = 0$ и $H^f = H$. Колличество вершин в H^f равно $|H^f| = |S| + |f|$.

Теорема 3. *Пусть* H_f *называется расширением* H *по* f: $min(f) \geq 2k$, $deg(H) = d$ *и* $|H^f| = N$. *Пусть* G *- простой граф,* $D > 12d^3k^2$, $mix(G) < \frac{k}{2+\log_2 d}$ *и* $N < \frac{n}{15d^2k}$. *Тогда* G *содержит копию* H^f.

Доказательство. (Идея) Подвешиваем граф за какую-то вершину и ищем в нем подграф подтверждая, что есть все соответствующие пути нужной длины как в теореме 1. $\square$