Серия 1. Раскрасочно-паросочетательная.

1. Докажите что для графа Петерсена (вспомните лекцию!) $\chi' = 4$.

2. ***** Ребра графа G покрашены в четыре цвета так, что первое и третье ребро любого пути длины три покрашены в разные цвета (цикл длины три тоже считается путем длины три). Докажите, что вершины G можно правильно раскрасить в четыре цвета.

3. ****** Раскраска вершин графа называется динамической, если любая его вершина степени, хотя бы два, смежна с двумя вершинами различных цветов. Докажите, что у любого графа существует правильная динамическая раскраска в $\Delta + 3$ цвета (Δ - максимальная степень графа). Оценка точная — контрпример к $\Delta + 2$ цветам цикл на 5 вершинах.

4. (Теоремы R.P. Gupta)

a)****** Пусть G двудольный граф с минимальной степенью $\delta > 0$. Докажите, что его ребра можно покрасить в δ цветов (не обязательно правильным образом) так, что для любой вершины среди выходящих из нее ребер присутствуют все δ цветов.

b)******** Пусть G простой граф с минимальной степенью δ, тогда ребра G можно покрасить в $\delta - 1$ цвет так, чтобы все $\delta - 1$ цвета присутствовали среди ребер выходящих из любой вершины.

5. ***** В 3-регулярном графе G количество правильных раскрасок ребер в три цвета не делится на 4. Докажите, что тогда в G существует гамильтонов цикл.

6. Квадратный лист бумаги разбит на 100 многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на 100 других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть 100 иголками, чтобы каждый многоугольник был проткнут по разу.

7. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным количеством девочек. Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное количество мальчиков из этой группы.

8. Выведите a) Лемму Холла из теоремы Кенига.

b) Теорему Кенига из леммы Холла.

9. Пусть M матрица состоящая из 0 и 1. Докажите, что наименьшее число линий (строк или столбцов) достаточное для того, чтобы покрыть все 1, равно наибольшему количеству 1 таких, что никакие две из них не лежат на одной линии.

10. Пусть G конечная группа и H подгруппа в ней. Докажите, что существует набор представителей $h_1, h_2, \ldots, h_n$ в G такой, что $h_1H, h_2H, \ldots, h_nH$ — все левые классы смежности и $Hh_1, Hh_2, \ldots, Hh_n$ — все правые классы смежности

11. ****** Докажите, что любой $2k$-регулярный граф имеет 2-фактор (2-регулярный подграф на всех вершинах исходного графа).

12. ******* Есть 30 гирек с весами 1 г, 2 г, … 30 г. Из них выбрали 10 общим весом 155 г. Докажите, что оставшиеся 20 гирек можно разбить на две группы по 10 гирек в каждой с равными суммами весов.