Серия 2. Связанно-раскрасочная.

1. Докажите, что если простой связный граф G имеет ровно две вершины при удалении которых, граф не теряет связность, то G – это путь.

2. Через $k(G)$ или просто k обозначается вершинная связность графа G (т.е. такое минимальное число, что при удалении каких-то k вершин граф теряет связность. Граф состоящий из одной вершины будем считать несвязным). Аналогично определяется $k'(G)$, как реберная связность графа.

Докажите, что в 3-регулярном графе $k = k'$.

3. ***** Граф называется k-критическим, если при удалении любого ребра его вершинная связность уменьшается. Докажите, что в двусвязном (имеется в виду $k(G) = 2$) k-критическом графе есть вершина степени 2.

4. a) Дан граф G. $(d_1, d_2, \ldots, d_{|V|})$, где $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_{|V|}$, последовательность степеней всех его вершин. Докажите тогда, что $\chi \leq \max\limits_i \min\{d_i + 1, i\}$.

b) $\chi \leq (2|E|)^{\frac{1}{2}}$.

c) $\chi(G) + \chi(G^c) \leq |V| + 1$. ($G^c$ — дополнение графа G до полного графа)

5. Известно, что в графе G любые два нечетных цикла обязательно пересекаются. Докажите, что $\chi(G) \leq 5$.

6. ***** Вершины связного графа покрашены в черный и белый цвета. Причем вершин черного цвета четное число. Докажите, что можно выкинуть не более $n - 1$ ребра так, чтобы в оставшемся графе все черные вершины имели бы нечетную степень, а все белые четную степень.

7. ****** Известно, что граф G с $\chi(G) = k$ имеет парвильную раскраску в $l \geq k$ цветов, что в каждый цвет покрашено по крайней мере 2 вершины. Докажите, что тогда G обладает правильной раскраской в k цветов, такой, что при этом в каждый цвет покрашено по крайней мере 2 вершины.

8. ****** По кругу стоят 128 целых чисел. Каждую секунду все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через некоторое время все числа будут делиться на 128.

9. a)****** Если G 3-связный граф и $|V(G)| \geq 4$, тогда есть $e \in E(G)$, что $G \setminus e$(стягивание графа по ребру), останется тоже 3-связным

b)****** Докажите, что граф G 3-связен, тогда и только тогда, когда существует последовательность графов $G_1, G_2, \ldots, G_n$ со следующими свойствами:

1)$G_0 = K^4$ и $G_n = G$.

2) У G_{i+1} есть ребро xy, у которого $d(x), d(y) \geq 3$ и $G_i = G_{i+1} \setminus xy$ для любого $i < n$.

10. Пусть G граф, $a, b \in V(G)$, $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ разделяет a и b в G. Будем говорить, что X минимально разделяет a и b, если никакое собственное подмножество X не разделяет a и b в G. Покажите:

a) X минимально разделяет a и b тогда и только тогда, когда любая вершина в X смежна с вершиной из компоненты C_a графа $G - X$ содержащую a и с вершиной в компоненте C_b, содержащую b.

b)***** Пусть X' другое разделяющее a и b множество с соответсвующими C'_a и C'_b. Покажите, что

$$Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

$$Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

отделяют a от b.

c) ***** Минимально ли разделяют Y_a и Y_b a и b если X и X' были минимальными?

11. Пусть дан k-связный граф , где $k \geq 2$.

a)***** Докажите, что если в нем $\geq 2k$ вершин, то он содержит цикл длинны по крайней мере $2k$.

b)***** Докажите, что через любые k вершин проходит цикл.