Серия 3. Производящно-комбинаторная.

1. a) Найдите в рекурентном виде число перестановок-инволюций s_n чисел $\{1, 2, ..., n\}$, то есть таких перестановок $\pi \in S_n$, что $\pi\pi = id$.

b) Подберите наиболее удобную производящую функцию ($\sum_n \frac{s_n}{c_n} t^n$, где c_n некоторая легко вычисляемая от n функция). Найдите в явном виде (отличном от формального ряда) эту функцию.

2. a) Обозначим через d_n число перестановок чисел $\{1, 2, ..., n\}$ без неподвижных точек, то есть таких $\pi \in S_n$, что $\pi(i) \neq i$. Найдите рекуррентную формулу для d_n.

b) Представьте d_n в виде $n! \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходящийся ряд.

3. ******* Докажите, что число способов представить натуральное число в виде суммы попарно различных натуральных чисел равно количеству способов представить это же число в виде суммы нечетных чисел, но уже не обязательно различных.

4. ***** В квадрате 4×4 есть 15 клеток (все кроме правой нижней). На клетках написаны подряд числа от 1 до 15 (слева направо в строчках и сверху вниз по столбцам). Разешается менять местами пустую клетку с любой соседней. Можно ли получить конфигурацию, в которой относительно начальной поменены местами клетки с номерами 14 и 15?

5. ******* Семейство множеств $\mathfrak{F}$ называется Δ-системой, если любые два множества из $\mathfrak{F}$ пересекаются по одному и тому же множеству (возможо пустому). Докажите, что существует $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и для любого семейства из $f(n, k)$ n элементных множеств можно выбрать Δ-подсистему мощности k.

6. ****** Граф называется N-свободным, если любой его индуцированный подграф на 4 вершинах не изоморфен пути из 3-ех ребер (N). Граф называется совершенным, если для любого его подграфа H размер максимальной клики в H равен $\chi(H)$.

a) Докажите, что N-свободный граф G связен, тогда и только тогда, когда $\overline{G}$ несвязен.

b) Докажите, что класс N-свободных графов это минимальный класс содержащий одновершинный граф и замкнутый относительно операций дизъюнктного объединения и дополнения.

c) Докажите, что N-свободные графы совершенны. (Нельзя пользоваться без доказательства фактом, что дополнение совершенного графа — совершенно).

7. ******* Перестановочным графом соответствующим некоторой перестановке $g \in S_n$ называется граф на n вершинах, причем вершины i и j $(i < j)$ соединены ребром, тогда и только тогда, когда $g(i) > g(j)$.

a) Докажите, что дополнение перестановочного графа тоже перестановочный граф.

b) Докажите, что перестановочный граф — совершенный.

c) Докажите, что для любых $n, m, k \in \mathbb{N}$ из любой последовательности длинны $kmn + 1$вещественных чисел можно выбрать либо строго возрастающую последоваельность длины $n+1$, либо строго убывающую длины $m+1$, либо подпоследовательность равных чисел длины $k + 1$.

8. ***** Покажите, что планарный связный граф G эйлеров, тогда и только тогда, когда его грани раскрашиваются в 2 цвета. (Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер)

9. ****** a) Докажите, что планарный граф можно правильно раскрасить в 5 цветов.

b)********** Докажите, что планарный граф 5-choosable. (Граф называется k-choosable, если у него есть допустимая правильная раскраска при условии, что у каждой вершины свой список допустимых цветов размера k. Нетрудно видеть k-choosable $\Rightarrow$ k-colorable. Обратное не верно наример для $K_{3,3}$ со списками вершин первой и второй доли — $(1, 2), (2, 3), (1, 3)$.)