

Серия 4. Короткая.

1. а) Посчитайте число способов разбить n -угольник на треугольники непересекающимися диагоналями.
б) Посчитайте количество способов провести n непересекающихся (не имеющих общих точек) хорд между $2n$ точками на окружности.
2. Каждому юноше нравятся несколько девушек, причем известно, что любым k из них нравятся в совокупности, по крайней мере kt девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить по гарему из t понравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.
3. *** (Теорема Шура) Докажите, что существует такая функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, что если множество $\{1, 2, \dots, f(n)\}$ раскрасить в n цветов, то найдутся одноцветные $x, y, x + y$, где $x \neq y$.
4. *** Докажите, что планарный граф можно представить как объединение трех лесов.
5. * Из картона склеен кубик. Двое играют в следующую игру: за ход разрешается сделать разрез вдоль любого ребра, которое еще не разрезано. Проигрывает тот, у кого кубик распадется на две части. Кто выиграет при правильной игре?
6. * Докажите, что среди 18 человек есть либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно не знакомых.