Серия 1. Паросочетательная.

1. Квадратный лист бумаги разбит на 100 многоугольников одинаковой площади с одной стороны и на 100 других той же площади с обратной стороны. Докажите, что этот квадрат можно проткнуть 100 иголками, чтобы каждый многоугольник был проткнут по разу.

2. В классе поровну мальчиков и девочек. Каждый мальчик дружит с четным количеством девочек. Докажите, что можно выбрать группу из нескольких мальчиков так, чтобы с каждой девочкой дружило четное количество мальчиков из этой группы.

3. Выведите a) Теорему Холла из теоремы Кенига.

b) Теорему Кенига из теоремы Холла.

4. Пусть M матрица состоящая из 0 и 1. Докажите, что наименьшее число линий (строк или столбцов) достаточное для того, чтобы покрыть все 1, равно наибольшему количеству 1 таких, что никакие две из них не лежат на одной линии.

5. Пусть G конечная группа и H подгруппа в ней. Докажите, что существует набор представителей $h_1, h_2, \ldots, h_n$ в G такой, что $h_1K, h_2K, \ldots, h_nK$ являются левыми классами смежности и $Kh_1, Kh_2K, \ldots, Kh_n$ являются правыми классами смежности.

6. Каждому юноше нравятся несколько девушек, причем известно, что любым k из них нравятся в совокупности, по крайней мере km девушек. Докажите, что каждому юноше можно выделить по гарему из m понравившихся ему девушек так, чтобы гаремы не пересекались.

7. Придумайте контрпример к теореме Холла в случае бесконечного графа.

8. ***** Есть 30 гирек с весами 1 г, 2 г, … 30 г. Из них выбрали 10 общим весом 155 г. Докажите, что оставшиеся 20 гирек можно разбить на две группы по 10 гирек в каждой с равными суммами весов.

9. ***** Пусть G двудольный граф и у каждой вершины есть свой список предпочтений, причем все предпочтения строгие. Придумайте эффективный (полиномиальный) алгоритм находящий

a) Какое-нибудь стабильное паросочетание.

b) Максимальное по размеру из всех стабильных паросочетаний.

10. ****** Через $\alpha(G)$ обозначают размер максимального пустого подграфа G. Пусть G ориентированный граф. Докажите, что все вершины G можно покрыть не более чем $\alpha(G)$ непересекающимися путями.