Серия 2. **********.

1. * Через $k(G)$ обозначается вершинная связность графа, т.е. минимальное число вершин, которое можно удалить из G, чтобы оставшийся граф перестал быть связным ($k(K_n) = n - 1$). Через $\alpha(G)$ обозначают размер максимального пустого подграфа G. Докажите, что если $|V(G)| \geq 3$, то

a) В G найдется простой цикл размера по крайней мере $k(G)$.

b) Найдется простой цикл размера по крайней мере $min(2k(G), |V(G)|)$.

c) Если $k(G) \geq \alpha(G)$, то в G найдется гамильтонов цикл.

2. *** Докажите, что планарный граф можно представить как объединение трех лесов.

3. * Докажите, что число способов представить натуральное число в виде суммы попарно различных натуральных чисел равно количеству способов представить это же число в виде суммы нечетных чисел, но уже не обязательно различных.

4. * В квадрате 4×4 есть 15 клеток (все кроме правой нижней). На клетках написаны подряд числа от 1 до 15 (слева направо в строчках и сверху вниз по столбцам). Разрешается менять местами пустую клетку с любой соседней. Можно ли получить конфигурацию, которая отличается от начальной тем, что клетки с номерами 14 и 15 поменяли местами?

5. * Раскраска вершин графа называется динамической, если любая его вершина степени, хотя бы два, смежна с двумя вершинами различных цветов. Докажите, что у любого графа существует правильная динамическая раскраска в $\Delta + 3$ цвета (Δ - максимальная степень графа). Оценка точная — контрпример к $\Delta + 2$ цветам цикл на 5 вершинах.

6. ** Известно, что граф G с $\chi(G) = k$ имеет правильную раскраску в $l \geq k$ цветов, что в каждый цвет покрашено по крайней мере 2 вершины. Докажите, что тогда G обладает правильной раскраской в k цветов, такой, что при этом в каждый цвет покрашено по крайней мере 2 вершины.

7. * По кругу стоят 128 целых чисел. Каждую секунду все числа одновременно заменяются на сумму двух своих соседей. Докажите, что через некоторое время все числа будут делиться на 128.

8. a) Дан граф G. $(d_1, d_2, \ldots, d_{|V|})$, где $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_{|V|}$, последовательность степеней всех его вершин. Через $\chi(G)$ обозначают минимальное число цветов, в которое можно раскрасить граф. Докажите тогда, что $\chi \leq \max\limits_i \min\{d_i + 1, i\}$.

b) $\chi \leq (2|E|)^{\frac{1}{2}}$.

c) $\chi(G) + \chi(G^c) \leq |V| + 1$. ($G^c$ — дополнение графа G до полного графа)

9. Известно, что в графе G любые два нечетных цикла обязательно пересекаются. Докажите, что $\chi(G) \leq 5$.

10. Докажите, что если простой связный граф G имеет ровно две вершины при удалении которых, граф не теряет связность, то G – это путь.

11. Радиусом графа $G = (V, E)$ называется величина

$$rad(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d_G(x, y),$$

где $d_G(x, y)$ обозначает расстояние между x и y. Пусть G – связный граф с радиусом $k \geq 3$ и максимальной степенью вершин $\Delta \geq 2$. Докажите, что тогда число вершин в G не превосходит Δ^k.

12. Остовным деревом графа называется любой его подграф, который содержит все вершины графа и является деревом. Нормальным остовным деревом графа G называется такое остовное дерево T с фиксированной вершиной $v \in V(G)$ (v – корень T), что если ориентировать все ребра T по направлению от корня v, то для любого ребра $(uw) \in E(G)$ по ориентированным ребрам T можно дойти либо из u в w, либо из w в u. Докажите, что в любом связном графе можно выбрать нормальное остовное дерево.