Серия 4. Комбинаторно-алгебраическая

1. Пусть M – симметрическая матрица, сумма столбцов которой равна 0. Рассмотрим подматрицу M_{-i} матрицы M без i-ой строки и i-ого столбца. Докажите, что значение определителя M_{-i} не зависит от выбора i.

2. Пусть I – матрица инциндентности графа $G = (V, E)$, т.е. матрица $n \times m$ с $n = |V|$, $m = |E|$ и

- $I[ve] = 1$, если $e = (vu)$, $v < u$;
- $I[ve] = -1$, если $e = (vu)$, $v > u$;
- $I[ve] = 0$ в противном случае.

Рассмотрим подматрицу M_I матрицы I без первой строки и содержащую $n - 1$ столбец. Докажите, что $det(M_I) = \pm 1$, если соответствующие столбцам M_I ребра графа образуют остовное дерево G, и $det(M_I) = 0$ в противном случае.

3. * Пусть матрица M размера $n \times n$ равна $A \cdot B$, где A и B матрицы размеров $n \times m$ и $m \times n$ соответственно, а $m > n$. Докажите формулу Бене-Коши, что $det(M) = \sum\limits_{S:|S|=n} det(A(S))det(B(S))$.

4. Найдите формулу для члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ с начальными данными $a_0 = 3$, $a_1 = 1$ и $a_2 = 8$.

5. a) Найдите в рекуррентном виде число перестановок-инволюций s_n чисел $\{1, 2, ..., n\}$, то есть таких перестановок $\pi \in S_n$, что $\pi\pi = id$.

b) Для экспоненциальной производящей функции $(\sum_n \frac{s_n}{n!} t^n)$ найдите уравнение, описывающее эту функцию.

6. a) Обозначим через d_n число перестановок чисел $\{1, 2, ..., n\}$ без неподвижных точек, то есть таких $\pi \in S_n$, что $\pi(i) \neq i$. Найдите рекуррентную формулу для d_n (подсказка: рассмотрите цикленное представление перестановки).

b) Найдите предел последовательности $\frac{d_n}{n!}$.