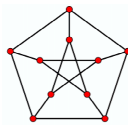
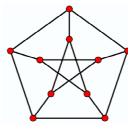


## Серия 5. Комбинаторная



1. Докажите что для графа Петерсена (см. рисунок)  $\chi' = 4$ .
2. На плацу сержант выстроил солдат в прямоугольник, затем он переставил солдат в каждом ряду по росту в убывающем порядке, затем сделал тоже самое для каждой колонны. Докажите, что в каждом ряду солдаты по-прежнему остались стоять в убывающем по росту порядке.
3. В 3-регулярном графе  $G$  количество правильных раскрасок ребер в три цвета не делится на 4. Докажите, что тогда в  $G$  существует гамильтонов цикл.
4. Дана квадратная матрица  $M$  размера  $n$ , где  $n \geq 2$ , составленная из чисел  $1, 2, \dots, n^2$ . Какой у нее может быть ранг?
5. Ребра графа  $G$  покрашены в четыре цвета так, что первое и третье ребро любого пути длины три покрашены в разные цвета (цикл длины три тоже считается путем длины три). Докажите, что вершины  $G$  можно правильно раскрасить в четыре цвета.
6. Семейство множеств  $F_1, F_2, \dots, F_k$  называется пересекающимся, если  $\forall i, j \quad F_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Докажите, что размер пересекающегося семейства множеств  $\mathfrak{F}$  состоящего из подмножеств  $n$  элементного множества не превосходит  $2^{n-1}$  и эта оценка точна.
7. \*\* Семейство множеств  $\mathfrak{F}$  называется  $\Delta$ -системой, если любые два множества из  $\mathfrak{F}$  пересекаются по одному и тому же множеству (возможно пустому). Докажите, что существует  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  и семейства  $n$  элементных множеств мощности  $f(n, k)$  можно выбрать  $\Delta$ -подсистему мощности  $k$ .
8. \*\* Граф называется  $N$ -свободным, если любой его индуцированный подграф на 4 вершинах не изоморфен пути из 3-х ребер. Граф называется совершенным, если для любого его индуцированного подграфа  $H$  размер максимальной клики  $H$  равен хроматическому числу  $\chi(H)$ .
  - а) Докажите, что  $N$ -свободный граф  $G$  связан, тогда и только тогда, когда  $\overline{G}$  несвязен.
  - б) Докажите, что класс  $N$ -свободных графов это минимальный класс содержащий одно-вершинный граф и замкнутый относительно операций дизъюнктного объединения и дополнения.
  - в) Докажите, что  $N$ -свободные графы совершенны. (Нельзя пользоваться фактом, что дополнение совершенного графа — совершенно).
9. \* Покажите, что планарный связный граф  $G$  эйлеров, тогда и только тогда, когда его грани раскрашиваются в 2 цвета. (Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер)

## Серия 5. Комбинаторная



1. Докажите что для графа Петерсена (см. рисунок)  $\chi' = 4$ .
2. На плацу сержант выстроил солдат в прямоугольник, затем он переставил солдат в каждом ряду по росту в убывающем порядке, затем сделал тоже самое для каждой колонны. Докажите, что в каждом ряду солдаты по-прежнему остались стоять в убывающем по росту порядке.
3. В 3-регулярном графе  $G$  количество правильных раскрасок ребер в три цвета не делится на 4. Докажите, что тогда в  $G$  существует гамильтонов цикл.
4. Дана квадратная матрица  $M$  размера  $n$ , где  $n \geq 2$ , составленная из чисел  $1, 2, \dots, n^2$ . Какой у нее может быть ранг?
5. Ребра графа  $G$  покрашены в четыре цвета так, что первое и третье ребро любого пути длины три покрашены в разные цвета (цикл длины три тоже считается путем длины три). Докажите, что вершины  $G$  можно правильно раскрасить в четыре цвета.
6. Семейство множеств  $F_1, F_2, \dots, F_k$  называется пересекающимся, если  $\forall i, j \quad F_i \cap F_j \neq \emptyset$ . Докажите, что размер пересекающегося семейства множеств  $\mathfrak{F}$  состоящего из подмножеств  $n$  элементного множества не превосходит  $2^{n-1}$  и эта оценка точна.
7. \*\* Семейство множеств  $\mathfrak{F}$  называется  $\Delta$ -системой, если любые два множества из  $\mathfrak{F}$  пересекаются по одному и тому же множеству (возможно пустому). Докажите, что существует  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такая, что для любого  $k \in \mathbb{N}$  и семейства  $n$  элементных множеств мощности  $f(n, k)$  можно выбрать  $\Delta$ -подсистему мощности  $k$ .
8. \*\* Граф называется  $N$ -свободным, если любой его индуцированный подграф на 4 вершинах не изоморфен пути из 3-х ребер. Граф называется совершенным, если для любого его индуцированного подграфа  $H$  размер максимальной клики  $H$  равен хроматическому числу  $\chi(H)$ .
  - а) Докажите, что  $N$ -свободный граф  $G$  связан, тогда и только тогда, когда  $\overline{G}$  несвязен.
  - б) Докажите, что класс  $N$ -свободных графов это минимальный класс содержащий одно-вершинный граф и замкнутый относительно операций дизъюнктного объединения и дополнения.
  - в) Докажите, что  $N$ -свободные графы совершенны. (Нельзя пользоваться фактом, что дополнение совершенного графа — совершенно).
9. \* Покажите, что планарный связный граф  $G$  эйлеров, тогда и только тогда, когда его грани раскрашиваются в 2 цвета. (Планарный граф — граф, который может быть изображен на плоскости без пересечения ребер)