

## Серия 6. Связная

1. Через  $k(G)$  или просто  $k$  обозначается вершинная связность графа  $G$  (т.е. такое минимальное число, что при удалении каких-то  $k$  вершин граф теряет связность. Граф состоящий из одной вершины будем считать несвязным). Аналогично определяется  $k'(G)$ , как реберная связность графа.

Докажите, что в 3-регулярном графе  $k = k'$ .

2. Пусть  $G$  граф,  $a, b \in V(G)$ ,  $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$  разделяет  $a$  и  $b$  в  $G$ . Будем говорить, что  $X$  минимально разделяет  $a$  и  $b$ , если никакое собственное подмножество  $X$  не разделяет  $a$  и  $b$  в  $G$ . Покажите:

а)  $X$  минимально разделяет  $a$  и  $b$  тогда и только тогда, когда любая вершина из  $X$  смежна с вершиной из компоненты  $C_a$  (компонента связности графа  $G - X$  содержащая  $a$ ) и с вершиной из компоненты  $C_b$  (содержит  $b$ ).

б) Пусть  $X'$  другое разделяющее  $a$  и  $b$  множество с соответствующими  $C'_a$  и  $C'_b$ . Покажите, что

$$Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

$$Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

отделяют  $a$  от  $b$ .

с) Минимально ли разделяют  $Y_a$  и  $Y_b$  вершины  $a$  и  $b$  если  $X$  и  $X'$  были минимальными?

3. \* Граф называется  $k$ -критическим, если при удалении любого ребра его вершинная связность уменьшается. Докажите, что в двусвязном (имеется в виду  $k(G) = 2$ )  $k$ -критическом графе есть вершина степени 2.

4. \*\* а) Если  $G$  3-связный граф и  $|V(G)| \geq 5$ , тогда есть  $e \in E(G)$ , что  $G \setminus e$  (стягивание графа по ребру), останется тоже 3-связным

б) Докажите, что граф  $G$  3-связен, тогда и только тогда, когда существует последовательность графов  $G_1, G_2, \dots, G_n$  со следующими свойствами:

1)  $G_0 = K^4$  и  $G_n = G$ .

2) В  $G_{i+1}$  есть ребро  $xy$ , для которого  $d(x), d(y) \geq 3$ , и  $G_i = G_{i+1} \setminus xy$ .

---

## Серия 6. Связная

1. Через  $k(G)$  или просто  $k$  обозначается вершинная связность графа  $G$  (т.е. такое минимальное число, что при удалении каких-то  $k$  вершин граф теряет связность. Граф состоящий из одной вершины будем считать несвязным). Аналогично определяется  $k'(G)$ , как реберная связность графа.

Докажите, что в 3-регулярном графе  $k = k'$ .

2. Пусть  $G$  граф,  $a, b \in V(G)$ ,  $X \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$  разделяет  $a$  и  $b$  в  $G$ . Будем говорить, что  $X$  минимально разделяет  $a$  и  $b$ , если никакое собственное подмножество  $X$  не разделяет  $a$  и  $b$  в  $G$ . Покажите:

а)  $X$  минимально разделяет  $a$  и  $b$  тогда и только тогда, когда любая вершина из  $X$  смежна с вершиной из компоненты  $C_a$  (компонента связности графа  $G - X$  содержащая  $a$ ) и с вершиной из компоненты  $C_b$  (содержит  $b$ ).

б) Пусть  $X'$  другое разделяющее  $a$  и  $b$  множество с соответствующими  $C'_a$  и  $C'_b$ . Покажите, что

$$Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$$

$$Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$$

отделяют  $a$  от  $b$ .

с) Минимально ли разделяют  $Y_a$  и  $Y_b$  вершины  $a$  и  $b$  если  $X$  и  $X'$  были минимальными?

3. \* Граф называется  $k$ -критическим, если при удалении любого ребра его вершинная связность уменьшается. Докажите, что в двусвязном (имеется в виду  $k(G) = 2$ )  $k$ -критическом графе есть вершина степени 2.

4. \*\* а) Если  $G$  3-связный граф и  $|V(G)| \geq 5$ , тогда есть  $e \in E(G)$ , что  $G \setminus e$  (стягивание графа по ребру), останется тоже 3-связным

б) Докажите, что граф  $G$  3-связен, тогда и только тогда, когда существует последовательность графов  $G_1, G_2, \dots, G_n$  со следующими свойствами:

1)  $G_0 = K^4$  и  $G_n = G$ .

2) В  $G_{i+1}$  есть ребро  $xy$ , для которого  $d(x), d(y) \geq 3$ , и  $G_i = G_{i+1} \setminus xy$ .