Серия 8. Ориентированная на **контрольную**

1. (Упр.) Докажите, что в турнирном графе существует гамильтонов путь (гамильтонов путь — путь проходящий по всем вершинам, полный или турнирный ориентированный граф это такой граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро).

2. * Дан полный ориентированный граф G, на его вершинах написаны положительные вещественные числа. Докажите, что найдется вершина, для которой сумма всех чисел на концах выходящих из нее ребер не меньше, чем сумма на началах всех входящих в нее ребер.

3. * В ориентированном графе 200 вершин, из каждой выходит хотя бы одно ребро и в каждую входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы граф стал сильно связным, т.е. из любой вершины можно добраться до любой другой. (Между двумя вершинами может быть несколько ребер)

4. ** Докажите, что для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения:

a) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребер.

b) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребер.

c) Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки a) и b) точны.

5. * Пусть G полный ориентированный граф с $2n$ вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{2n}$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_{2n}$.

6. ** На вершинах графа G написаны положительные стоимости. Рассмотрим $\mathcal{E}$ — множество самых дорогих клик в G. Известно, что в G нет вершины лежащей во всех кликах из $\mathcal{E}$. Докажите, что тогда суммарная стоимость всех вершин для некоторой клики из $\mathcal{E}$ не больше, чем половина от общей стоимости всех вершин.

Серия 8. Ориентированная на **контрольную**

1. (Упр.) Докажите, что в турнирном графе существует гамильтонов путь (гамильтонов путь — путь проходящий по всем вершинам, полный или турнирный ориентированный граф это такой граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро).

2. * Дан полный ориентированный граф G, на его вершинах написаны положительные вещественные числа. Докажите, что найдется вершина, для которой сумма всех чисел на концах выходящих из нее ребер не меньше, чем сумма на началах всех входящих в нее ребер.

3. * В ориентированном графе 200 вершин, из каждой выходит хотя бы одно ребро и в каждую входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы граф стал сильно связным, т.е. из любой вершины можно добраться до любой другой. (Между двумя вершинами может быть несколько ребер)

4. ** Докажите, что для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения:

a) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребер.

b) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребер.

c) Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки a) и b) точны.

5. * Пусть G полный ориентированный граф с $2n$ вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{2n}$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_{2n}$.

6. ** На вершинах графа G написаны положительные стоимости. Рассмотрим $\mathcal{E}$ — множество самых дорогих клик в G. Известно, что в G нет вершины лежащей во всех кликах из $\mathcal{E}$. Докажите, что тогда суммарная стоимость всех вершин для некоторой клики из $\mathcal{E}$ не больше, чем половина от общей стоимости всех вершин.

Серия 8. Ориентированная на **контрольную**

1. (Упр.) Докажите, что в турнирном графе существует гамильтонов путь (гамильтонов путь — путь проходящий по всем вершинам, полный или турнирный ориентированный граф это такой граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро).

2. * Дан полный ориентированный граф G, на его вершинах написаны положительные вещественные числа. Докажите, что найдется вершина, для которой сумма всех чисел на концах выходящих из нее ребер не меньше, чем сумма на началах всех входящих в нее ребер.

3. * В ориентированном графе 200 вершин, из каждой выходит хотя бы одно ребро и в каждую входит хотя бы одно ребро. Докажите, что можно добавить не более 100 новых ориентированных ребер так, чтобы граф стал сильно связным, т.е. из любой вершины можно добраться до любой другой. (Между двумя вершинами может быть несколько ребер)

4. ** Докажите, что для сильно связного ориентированного графа G на n вершинах выполняются следующие утверждения:

a) Существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-2$ ребер.

b) Если в графе G между любыми двумя вершинами проведено не более одного ребра, то существует сильно связный остовный подграф графа G, в котором не более $2n-3$ ребер.

c) Для всех $n \geq 3$ постройте примеры графов, для которых оценки a) и b) точны.

5. * Пусть G полный ориентированный граф с $2n$ вершинами. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 \to a_2 \to \dots \to a_{2n}$, что его концы соединены ребром $a_1 \to a_{2n}$.

6. ** На вершинах графа G написаны положительные стоимости. Рассмотрим $\mathcal{E}$ — множество самых дорогих клик в G. Известно, что в G нет вершины лежащей во всех кликах из $\mathcal{E}$. Докажите, что тогда суммарная стоимость всех вершин для некоторой клики из $\mathcal{E}$ не больше, чем половина от общей стоимости всех вершин.