Домашняя работа 4 (на 10.03).

Во всех задачах t — целое, не являющееся полным квадратом, а в первой и второй задачах $\nu(z) = |z|^2$. Так же напоминаю, что задача 2 сложная и ее стоит решать последней.

$\boxed{\textbf{ALG 1.}}$ Пусть $t < 0$, докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$ — евклидово кольцо относительно нормы ν, если и только если $t \in \{-1, -2\}$ (подсказка: подсказка: нарисуйте элементы этого кольца на комплексной плоскости и используйте переформулировку условия евклидовости, полученную в классе).

$\boxed{\textbf{ALG 2.}}$ Пусть $t < 0$ и $t \equiv 1 \pmod 4$. Докажите, что $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{t}}{2}]$ — евклидово кольцо относительно нормы ν, если и только если $t \in \{-3, -7, -11\}$ (подсказка: подсказка: нарисуйте элементы этого кольца на комплексной плоскости и используйте переформулировку условия евклидовости, полученную классе).

$\boxed{\textbf{ALG 3.}}$ Докажите, что 2 не является простым элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{t}]$.

$\boxed{\textbf{ALG 4.}}$ Пусть R — факториальное кольцо и r — неприводимый элемент кольца R. Докажите, что r — простой элемент кольца R.

$\boxed{\textbf{ALG 5.}}$ Пусть n — натуральное число. Разложите в сумму простейших над полем $\mathbb{C}$ дробь $\frac{n!}{x(x-1)\ldots(x-n)}$.