Практика 1. Функция Мебиуса.

$\boxed{\textbf{DM 1.}}$ Определить производящую функцию $f(z)$ для чисел Фибоначчи F_n. Получить с ее помощью явные выражения для этих чисел.

$\boxed{\textbf{DM 2.}}$ Обобщением чисел Фибоначчи F_n и чисел Люка L_n являются так называемые последовательности Люка $U_n(p,q)$ и $V_n(p,q)$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$U_{n+2} = p\,U_{n+1} - q\,U_n, \;\; n \geq 0; \qquad V_{n+2} = p\,V_{n+1} - q\,V_n, \;\; n \geq 0;$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1; \qquad V_0 = 2, \quad V_1 = p.$$

Построить производящие функции для этих чисел.

$\boxed{\textbf{DM 3.}}$ В случае $p = 2$, $q = -1$ числа $U_n(2,-1)$ называются числами Пелла P_n (Pell numbers). Доказать для чисел Фибоначчи F_n и для чисел Пелла P_n так называемую формулу Кассини:

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad P_{n+1}P_{n-1} - P_n^2 = (-1)^n.$$

$\boxed{\textbf{DM 4.}}$ Составить рекуррентное соотношение для количества a_n слов длины n над алфавитом $\{0,1,2\}$, не содержащих двух идущих подряд нулей. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

$\boxed{\textbf{DM 5.}}$ Доказать, что в любой решетке $(x \wedge y) \vee y = y$ и $(x \vee y) \wedge y = y$.

$\boxed{\textbf{DM 6.}}$ Функцией Эйлера $\phi(z)$ называется формальный степенной ряд вида

$$\phi(z) = \frac{\phi_1}{1^z} + \frac{\phi_2}{2^z} + \cdots + \frac{\phi_n}{n^z} + \cdots,$$

коэффициенты ϕ_n которой подсчитывают количество чисел $0 < d < n$, меньших n и взаимно-простых с ним. Доказать, что для любого $n \geq 0$ справедливо тождество

$$n = \sum_{d|n} \phi_d.$$

$\boxed{\textbf{DM 7.}}$ Пусть x и y есть пара элементов частично упорядоченного множества P, таких, что $x \preceq y$. Мультицепью назовем мультимножество элементов $x_1, \ldots, x_k$, таких, что $x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_k$. Доказать, что количество мультицепей вида

$$x = x_0 \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_k = y$$

равняется $\zeta^k(x,y)$.