Практика 2. Линейные рекуррентные соотношения.

$\boxed{\textbf{DM 8.}}$ Решить с помощью обыкновенных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами:

(а) $a_{n+1} = a_n + 2^n$, $a_0 = 0$;;
(б) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, $a_0 = a_1 = 1$;
(в) $a_{n+3} = -3a_{n+2} - 3a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = 0$.

$\boxed{\textbf{DM 9.}}$ Пусть числовая последовательность a_n описывает количество битовых строк длины n, в которых между каждой парой единиц расстояние больше или равно трем. Составить рекуррентное соотношение для этой последовательности и найти для неё обыкновенную производящую функцию.

$\boxed{\textbf{DM 10.}}$ Составить рекуррентное соотношение для количества a_n способов замостить доску размером $3 \times n$ костяшками домино. Решить это рекуррентное соотношение с помощью обыкновенных производящих функций.

$\boxed{\textbf{DM 11.}}$ Решите с помощью экспоненциальных производящих функций следующие линейные рекуррентные соотношения:

(а) $a_{n+1} = 2(n+1)a_n + (n+1)!$, $a_0 = 0$,
(б) $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$, $a_0 = a_1 = 1$,
(в) $a_n = na_{n-1} + n(n-1)a_{n-2}$, $a_0 = a_1 = 1$.

$\boxed{\textbf{DM 12.}}$ Доказать, что количество путей на плоскости, выходящих из начала координат, приходящих в точку с координатами (n, n), состоящих из отрезков $(0, 1)$ и $(1, 0)$, и не поднимающихся выше диагонали $x = y$, описывается числами Каталана.

$\boxed{\textbf{DM 13.}}$ Доказать, что количество *полных* плоских корневых бинарных деревьев (т.е. деревьев, у которых любая вершина имеет либо ровно двух потомков, либо ни одного) с $(n+1)$-м листом равно числу Каталана C_n.