Практика 3. Мультииндексные рекуррентные соотношения.

DM 14. Одной из комбинаторных интерпретаций чисел Каталана C_n, описанных в предыдущем параграфе, было количество путей на плоскости (n, k), исходящих из начала координат, оканчивающихся в точке с координатами $(2n, 0)$, состоящих из отрезков $(1, 1)$ и $(1, -1)$, и никогда не опускающихся ниже оси абсцисс. Рассмотреть обобщение этой задачи, а именно, найти рекуррентные соотношения, описывающие количество $d_{n,k}$ таких путей, оканчивающихся в некоторой точке (n, k).

DM 15. Найти обыкновенную производящую функцию $d(z, t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} d_{n,k} z^k t^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_n(z) t^n$, $P_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} d_{n,k} z^k$. для описанных в предыдущем упражнении чисел $d_{n,k}$, зная производящую функцию для чисел Каталана.

DM 16. Рассмотрим функцию $1/\sin(\theta)$. Используя обозначение $x = \cos(\theta)$, ее можно переписать так: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Будем дифференцировать $f(x)$ по x. Ясно, что n-ю производную этой функции можно представить в виде $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(1-x^2)^{n+1/2}}$, где $Q_n(x)$ есть некоторой полином от x степени n. Доказать, что для этого полинома справедливо рекуррентное соотношение вида $Q_{n+1}(x) = (1 - x^2)Q'_n(x) + (2n + 1)xQ_n(x)$ $Q_0 = 1$.

DM 17. Доказать, что полуэкспоненциальная производящая функция вида $w(x, t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} Q_n(x)\frac{t^n}{n!}$ для полиномов, описанных в предыдущем упражнении, равна $w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{(1-t(1+x))(1+t(1-x))}}$.

DM 18. Используя бином Ньютона, получить явные формулы для полиномов $Q_n(x)$.