Листок 14. Теория игр.

$\boxed{\textbf{DM-ML 94.}}$ Дана система из n линейных уравнений. Докажите, что система несовместна тогда и только тогда, когда линейными комбинациями из этих уравнений можно получить $0 = 1$ (в решении нельзя без доказательства пользоваться теоремами линейной алгебры, если вы их еще не изучали в Академическом университете).

$\boxed{\textbf{DM-ML 95.}}$ Пусть платежная матрицы игры квадратная и кососимметрическая (т.е. $a_{i,j} = -a_{j,i}$). Покажите, что цена игры равняется нулю.

$\boxed{\textbf{DM-ML 96.}}$ Рассмотрим вещественную матрицу $m \times n$. Седловым элементом матрицы называется элемент, который является минимальным (или одним из минимальных) в своей строке и максимальным (или одним из максимальных) элементов своего столбца.

(а) Покажите, что если седловых элементов несколько, то они все равны.

(б) Покажите, что если в матрице есть седловой элемент, то он равен цене игры.

$\boxed{\textbf{DM-ML 97.}}$ Найдите цены игр и оптимальные стратегии для матричных игр, которые задаются такими матрицами:

(а) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(б) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{\textbf{DM-ML 27.}}$ Правило ослабления позволяет вывести из дизъюнкта A дизъюнкт $A \vee B$ для любого дизъюнкта B. Покажите, что если из дизъюнктов $D_1, D_2, \ldots, D_n$ семантически следует дизъюнкт C (это значит, что любой набор значений переменных, который выполняет все дизъюнкты D_i, выполняет также и C), то C можно вывести из D_i с помощью применений правил резолюции и ослабления.

$\boxed{\textbf{DM-ML 28.}}$

(г) Покажите, что существует схема для сложения двух n-битных чисел размера $O(n)$ и глубины $O(\log n)$.

$\boxed{\textbf{DM-ML 65.}}$ Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $[k/2] + 1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета ($[x]$ обозначает целую часть числа x).

$\boxed{\textbf{DM-ML 70.}}$ Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

$\boxed{\textbf{DM-ML 85.}}$

(б) Предположим, что у нас есть оракульный доступ к строке Z (это значит, что можно делать запросы к строке Z, за один запрос можно узнать один бит строки Z), которая отличается от $\mathrm{WH}(a)$ не более, чем в доле $\frac{1}{4} - \epsilon$ позиций, где ϵ — это некоторая константа, причем строка $a \in \{0,1\}^n$ нам неизвестна. Придумайте вероятностный алгоритм, который для всех $x \in \{0,1\}^n$ вычислит $f_a(x)$ с вероятностью как минимимум $\frac{9}{10}$, причем этот алгоритм может должен делать лишь константное число запросов к строке Z и работать полиномиальное от n время.

$\boxed{\textbf{DM-ML 86.}}$ Назовем вероятностной булевой схемой такую схему, часть входов которой называются случайными битами. Пусть схема C имеет $n+m$ входов, первые n входов мы будем понимать как непосредственно входы, оставшиеся m входов как случайные биты. Будем говорить, что схема C вычисляет функцию $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с ограниченной ошибкой, если для каждого $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq \frac{2}{3}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^m$ с равными вероятностями. Пусть функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ вычисляется вероятностной схемой C размера s с ограниченной ошибкой.

(а) Покажите, что для каждого многочлена $p(n)$ найдется такая вероятностная схема C' с $n + m'$ входами, размер которой полиномиален относительно sn, что при всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $\mathsf{P}[f(x) = C(x,r)] \geq 1 - 2^{-p(n)}$, где вероятность берется по случайной строке r, которая принимает все значения из множества $\{0,1\}^{m'}$ с равными вероятностями.

(б) Покажите, что найдется обычная схема с n входами, размер которой полиномиален относительно sn, что для всех $x \in \{0,1\}^n$ выполняется $f(x) = C(x)$.