## Домашнее задание 3 (на 23.10).

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ Задача из класса: Пусть $G$ есть простой граф, в котором $n$ вершин, $m$ ребер и $k$ компонент связности. Докажите, что $m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$.

$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ Рассмотрим произвольную неубывающую последовательность натуральных чисел $\{d_k\}_{k=1}^n$, $n > 1$. Докажите, что равенство $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n-2, \quad d_i > 0$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы эта последовательность была графовой для некоторого дерева $T$.

$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ Доказать, что в простом графе, содержащем $m \geq n-1$ ребер, существует как минимум $m-n+1$ цикл.

$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ Полным $m$-арным деревом называется корневое дерево, у которого любая вершина, отличная от листа, имеет ровно $m$ детей. Предположим, что в таком дереве существует $k$ не листовых вершин. Докажите, что в этом дереве имеется $(m-1)k+1$ лист.

$\boxed{\textbf{COMB 5.}}$ Докажите, что центр дерева — либо вершина, либо ребро.

$\boxed{\textbf{COMB 6.}}$ Придумайте алгоритм, который проверяет два дерева на изоморфизм за линейное время.

$\boxed{\textbf{COMB 7.}}$ Пусть $T$ — остовное дерево связного графа $G$, а $e$ — ребро этого графа. Докажите, что граф $\bar{T} + e$ содержит единственный минимальный разрез графа $G$.

$\boxed{\textbf{COMB 8.}}$ Докажите, что для любого подмножества $S$ множества $V(G)$ вершин графа $G$ справедливо равенство $|\partial(S)| = \sum\limits_{x \in S} deg(x) - 2|E(G[S])|$.

$\boxed{\textbf{COMB 9.}}$ Докажите, что в графе $G$ все вершины четны тогда и только тогда, когда для любого подмножества $S$ множества $V(G)$ вершин графа количество ребер $|\partial(S)|$ в реберном разрезе, связанным с $S$, четно.