Домашнее задание 4 (на 30.10).

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ Пусть $f(z) = \sum a_n z^n$ — производящая функция для числовой последовательности $\{a_n\}$. Выразите через $f(z)$ производяющую функцию для последовательности $e_n = ((n+1) \bmod 2) \cdot a_n$.

$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ Пусть $h(z) = 1 + 3z, \quad g(z) = 1 - z - 6z^2$. Найдите коэффициенты f_n производящей функции $f(z)$, связанной с $g(z)$ и $h(z)$ равенством $f(z)g(z) = h(z)$.

$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ Известно, что экспоненциальные производящие функции $F(z)$ и $G(z)$ для числовых последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно связаны соотношением $G(z) = F(z)/(1-z)$. Выразите b_n через a_n.

$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ Пусть $a_{n+1} = 2a_n - 10$. Используя обыкновенные производящие функции, найдите общий вид a_n.

$\boxed{\textbf{COMB 5.}}$ Доказать формулу: $\frac{1}{(1-\alpha z)^k} = \sum \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) (\alpha z)^n$.

$\boxed{\textbf{COMB 6.}}$ Определите производящую функцию для чисел Фибоначчи. Получите с ее помощью числа Фибоначчи в явном виде.

$\boxed{\textbf{COMB 7.}}$ Выразить через $1 - z$ обыкновенные производящие функции последовательностей

(а) $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ \ldots,\ n \cdot (n+1),\ \ldots,$

(б) $1^2,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots.$

$\boxed{\textbf{COMB 8.}}$ Найти явные формулы (при помощи обыкновенных производящих функций) для последовательностей заданных следующими реккурентными формулами:

(а) $a_{n+1} = a_n + 2^n$ $(a_0 = 0)$,

(б) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ $(a_0 = 2,\ a_1 = 6)$.

$\boxed{\textbf{COMB 9.}}$ Найти общий вид решения неоднородного реккурентного соотношения $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n + 3 \cdot 2^n$.