Домашнее задание 5 (на 20.11).

Разбор третьей задачи из прошлого домашнего задания

Решим эту задачу по определению кольца экспоненциальных производящих функций. По сути нужно найти обратный элемент в кольце $\mathbb{C}_e[[z]]$ для элемента $1-z$.

Предположим, что искомый элемент это $(x_0, x_1, \dots)$. По определению операции произведения в этом кольце напишем уравнения: $1 = x_0 \cdot 1, \quad 0 = x_k \cdot 1 - x_{k-1} \cdot k$ для любого $k > 0$. Из этого видно, что искомые $x_k = k!$.

После того, как мы нашли обратный элемент в экспоненциальном кольце, опять воспользуемся определением умножения в этом кольце, но уже для функций F и G. А именно: $F(z)(1-z)^{-1} = G(z)$, следовательно $g_n = \sum \binom{n}{k} f_k x_{n-k} = \sum \binom{n}{k} f_k (n-k)! = \sum \frac{n!}{k!} f_k$.

Или же можно пытаться перейти к обыкновенным производящим функциям. Что значит "перейти"? Формально мы зададим биективное отображение Φ из кольца экспоненциальных производящих функций в кольцо обыкновенных производящих функций: $\Phi(\{a_0, a_1, a_2, \dots a_k, \dots\}) = \{a_0, a_1, a_2/2, \dots a_k/k!, \dots\}$. Теперь мы заметим, что $\Phi(\{a_k\}) \cdot \Phi(\{b_k\}) = \Phi(\{a_k\} \cdot \{b_k\})$ для любых двух элементов кольца $\{a_k\}, \{b_k\} \in \mathcal{C}_e[[z]]$. Таким образом,это отображение является изоморфизмом двух колец. Это позволяет нам решать задачу следующим образом: пусть $H(z) = (1-z)^{-1}$, $f(z) = \Phi(F(z))$, $g(z) = \Phi(G(z))$ и $h(z) = \Phi(H(z))$, причем $H(z)$ — элемент кольца экспоненциальных производящих функций, а f, g и h — элементы кольца обыкновенных производящих функций. Тогда $G(z) = F(z) \cdot H(z)$, $g(z) = f(z) \cdot h(z)$, $h(z) = \Phi(H(z)) = \Phi((1-z)^{-1}) = (\Phi(1-z))^{-1} = (1-z)^{-1}$, так как Φ — изоморфизм. Но теперь мы получили задачу, которая у нас уже была. Останется лишь применить обратное отображение в экспоненциальные производящие функции Φ^{-1}.

COMB 1. Покажите, что в случае конечного числа ненулевых $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ у получающейся в результате перемножения двух функций $f(z) = \sum \frac{a_k}{k^z} \qquad g(z) = \sum \frac{b_k}{k^z}$ функции $h(z) = \sum \frac{c_k}{k^z}$ коэффициенты рассчитываются по формулам $c_n = \sum_{d|n} a_d b_{n/d}$.

COMB 2. Какие элементы кольца производящих функций Дирихле обратимы?

COMB 3. Докажите формулу обращения Мебиуса: если g и f — комплекснозначные функции, заданные на натуральных числах, причем $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ для любого натурального n, то верно $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g(n/d)$ для любого n, где $\mu(n)$ — функция Мебиуса, примененная к числу n.

COMB 4. Докажите, что верна формула $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, где $\varphi(d)$ — функция Эйлера, примененная к числу d.

Определение. Функцией Эйлера также называется элемент кольца производящих функций Дирихле $\varphi(z) = \sum \frac{\varphi_k}{k^z}$.

COMB 5. Проверьте, что $\zeta(z-1) = \zeta(z) \cdot \varphi(z)$.

COMB 6. Решите с помощью экспоненциальных производящих функций линейное рекуррентное соотношение: $a_n = n a_{n-1} + n(n-1) a_{n-2}$, если $a_0 = a_1 = 1$.

COMB 7. Вычислить количество a_n слов длины n над алфавитом $\{0, 1, 2\}$, не содержащих двух идущих подряд нулей.

$\boxed{\textbf{COMB 8.}}$ Найдите формулу для члена последовательности, заданной рекуррентным соотношением $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$ с начальными данными $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 8$.

$\boxed{\textbf{COMB 9.}}$ Обозначим через d_n число перестановок чисел от 1 до n без неподвижных точек (*беспорядков*), то есть таких $\pi \in S_n$, что $\pi(i) \neq i$.

(а) Найдите рекуррентную формулу для d_n (а лучше две).

(б) Найдите предел последовательности $d_n/n!$.