

### Домашнее задание 1 (от 4.09).

**COMB 1.** Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Доказать, что расстояние между хотя бы двумя из них меньше 0.5 сантиметров

**COMB 2.** Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

**COMB 3.** На плоскости нарисовано  $n$  попарно не параллельных прямых. Доказать, угол между по крайней мере двумя из этих прямых меньше или равен величине  $\pi/n$ .

**COMB 4.** Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?

**COMB 5.** Доказать следующую формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

**COMB 6.** Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+k+1}{n}.$$

**COMB 7.** Используя формулу суммирования по верхнему индексу вычислить:

- (а)  $\sum_{i=0}^n i$ ,
- (б)  $\sum_{i=0}^n i^2$ ,
- (в)  $\sum_{i=0}^n i^3$ .