Домашняя работа 3 (на 25.03).

Необходимо набрать 5 баллов.

$\boxed{\textbf{COMB 1.}}$ (1 балл) Показать, что в кубе Q_k найдется по меньшей мере $2^{2^{k-2}}$ совершенных паросочетаний для всех $k \geq 2$.

$\boxed{\textbf{COMB 2.}}$ (1 балл) Пусть S есть подмножество множества $V(G)$ вершин графа G, покрытое некоторым паросочетанием M. Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?

$\boxed{\textbf{COMB 3.}}$ (2 балла) Предъявить для любого $d > 1$ $(2d+1)$-регулярный граф, в котором совершенное паросочетание отсутствует.

$\boxed{\textbf{COMB 4.}}$ (1,5 балла) Пусть M и N есть два паросочетания в графе G, такие, что $|N| > |M|$. Доказать, что существуют паросочетания M' и N', такие, что $|M'| = |M| + 1$, $|N'| = |N| - 1$, $M' \cup N' = M \cup N$ и $M' \cap N' = M \cap N$.

$\boxed{\textbf{COMB 5.}}$ (1 балл) Найдите минимальный пример двудольного графа, в котором существует паросочетание, наибольшее по включению, не являющееся максимальным.

$\boxed{\textbf{COMB 6.}}$ (1,5 балла) Рассмотрим следующую игру на графе G: два игрока поочередно выбирают вершины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ графа так, чтобы вершина x_{i+1} была бы смежной с вершиной x_i; тот из игроков, кто не сможет выбрать новую вершину по этим правилам, проигрывает. Доказать, что первый игрок имеет выигрышную стратегию тогда и только тогда, когда в G отсутствует совершенное паросочетание.