Практика 5 (решали 11.03).

COMB 1. (0,5 балла) Найти количество совершенных паросочетаний в полном графе на четном числе вершин.
COMB 2. (0,5 балла) Подсчитать количество совершенных паросочетаний у дерева на n вершинах.
COMB 3. (1 балл) Подсчитать количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$, состоящем из блоков X и Y одинакового размера n. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

1,5 балла 1.11. Граф называется кактусом, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, любое дерево является кактусом. Предъявить кактусы, построенные на $2k+1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Доказать, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.
1 балл 1.13. Доказать, что односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.
1,5 балла 1.16. Доказать, что граф G является реберно двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде

$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k,$$

где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ графа G.
0,5 балла 2.1. Пусть G есть вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: в графе G найдется путь Q, соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.
1 балл 2.2. Пусть D есть орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \ldots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j. Определить $\lambda(1, 12)$ в таком графе.
1,5 балла 2.3. Доказать, что после удаления произвольного ребра $e = (x, y)$ в орграфе D вершинная связность κ этого орграфа уменьшится как максимум на единицу, то есть что $\kappa(D - e) \geq \kappa(D) - 1$.
1,5 балла 2.4. С помощью теоремы Менгера доказать вершинную k-связность k-мерного гиперкуба Q_k.