Домашняя работа 2. Биномиальные коэффициенты.

Необходимо наборать 5 баллов.

COMB 31. (1 балл) Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

COMB 32. (1 балл) Для натурального n, назовем n-разбиением числа k назовем упорядоченный набор неотрицательных целых чисел a_i, $1 \leq i \leq n$, для которого верно, что $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$. Например, $(3,0,1)$ и $(0,3,1)$ — два различных 3-разбиения числа 4. Подсчитайте количество n-разбиений числа k, удовлетворяющих ограничениям

$$a_i \geq s_i, \quad i = 1, \ldots, n; \qquad\qquad s_1 + s_2 + \ldots + s_n =: s \leq k.$$

COMB 33. (2 балла) Пусть $\widehat{S}(n,k)$ — число *сюръективных отображений*, то есть число функций f из n-элементного множества X в k-элементное множество Y, таких что $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : f(x) = y$. Найдите явные формулы для $\widehat{S}(n,3)$ и $\widehat{S}(n,n-2)$.

COMB 34. (2 балла) Докажите комбинаторно следующую формулу:

$$\widehat{S}(n,k) = k \cdot \widehat{S}(n-1,k) + k \cdot \widehat{S}(n-1,k-1).$$

Эта формула вполне подходит для того, чтобы вычислять значения $\widehat{S}(n,k)$ рекурсивно. Но чтобы вычисление не шло вечно, для каких-то значений аргументов нужно сразу знать ответ и не применять рекуррентную формулу. Определите начальные условия: чему равно $\widehat{S}(n,0)$, $\widehat{S}(n,n)$ и, в частности, $\widehat{S}(0,0)$?

COMB 35. (2 балла) Пусть числом Белла $B(n)$ называется число разбиений чисел от 1 до n на неупорядоченные блоки (по определению $B(0) = 1$).

Доказать, что число разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, равно числу Белла $B(n-1)$.