Практика 5. Теория графов.

$\boxed{\textbf{COMB 56.}}$ Доказать, что кубический граф, то есть граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.

$\boxed{\textbf{COMB 57.}}$ Доказать, что в любом графе существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями.

$\boxed{\textbf{COMB 58.}}$ Сколько ребер должен иметь простой граф на n вершинах, чтобы он гарантированно был связным?

$\boxed{\textbf{COMB 59.}}$ Пусть F есть лес, построенный на n вершинах и имеющий k компонент связности. Подсчитать количество m ребер в графе F. Доказать, что любой простой граф, имеющий k компонент связности и найденное в первой части упражнения количество m ребер, обязательно является лесом.

$\boxed{\textbf{COMB 60.}}$ Пусть в графе G – 22 ребра и он регулярен. Сколько в нем может быть вершин.

$\boxed{\textbf{COMB 61.}}$ Пусть $v_1, \ldots, v_n$ — все вершины графа G упорядоченные так, что $\deg(v_1) \geq \deg(v_2) \ldots \deg(v_n)$. Тогда назовем графовой последовательностью графа G последовательность $\deg(v_1), \deg(v_2), \ldots, \deg(v_n)$.

Докажите, что невозрастающая последовательность $d_1, \ldots, d_n$ — графовая тогда и только тогда, когда $\sum d_i$ делится на 2.

$\boxed{\textbf{COMB 62.}}$ Пусть M_a и M_i есть матрицы смежности и инцидентности простого графа G Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^T$, где M_i^T — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^T$ и M_a?

$\boxed{\textbf{COMB 63.}}$ Пусть G есть граф, вершины которого помечены битовыми строками длины $k > 1$. Вершины x и y в таком графе являются смежными тогда и только тогда, когда соответствующие им битовые строки отличаются ровно в двух позициях. Определить количество связных компонент в таком графе