

### Задание 11 (на 23.11).

Пусть  $I_1$  и  $I_2$  — две интерпретации одной сигнатуры. Мы говорим, что  $I_1$  является расширением  $I_2$ , если  $M_1$  (носитель  $I_1$ ) является надмножеством  $M_2$  (носителя  $I_2$ ), все функциональные и предикатные символы согласованы на  $M_2$ . Говорят, что это расширение является элементарным, если любая (не обязательно замкнутая формула) на любой оценке свободных переменных, принимающих значения в  $M_2$  одновременно истинна и ложна в интерпретациях  $I_1$  и  $I_2$ .

**ML 53.**

- (а) Покажите, что естественные интерпретации  $(=, +, *, 0, 1)$  для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.
- (б) Для двух алгебраически замкнутых полей  $k_1$  и  $k_2$  характеристики 0 выполняется, что  $k_1$  является надполем поля  $k_2$ . Покажите, что естественная интерпретация  $(=, +, *, 0, 1)$  в поле  $k_1$  является элементарным расширением естественной интерпретации  $(=, +, *, 0, 1)$  в поле  $k_2$ .
- (в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.
- (г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений  $\bigwedge_{i=1}^k P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены  $Q_1(x_1, \dots, x_n), \dots, Q_k(x_1, \dots, x_n)$ , что  $\sum_i Q_i P_i = 1$ .

**ML 54.** Покажите (в случае пропозициональных формул), что если  $F_1, F_2, \dots, F_n \vdash F$ , то формула  $(\bigwedge_{i=1}^n F_i) \rightarrow F$  является тавтологией.

**ML 55.** Покажите, что для любых пропозициональных формул  $A, B$  и  $C$  формула  $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$  является выводимой.

**ML 56.** Покажите, что если формула  $\phi$  является, то и формула, которая получится при подстановке другой формулы вместо переменной формулы  $\phi$ , тоже будет выводимой.

**ML 57.** Покажите, что следующие формулы являются выводимыми:

- (а)  $A \rightarrow \neg\neg A$  и  $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ ;
- (б)  $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C))$  и  $((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$ ;
- (в)  $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge C)$  и  $((A \vee B) \wedge C) \rightarrow ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$ ;
- (г)  $((A \vee C) \vee (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee C)$  и  $((A \wedge B) \vee C) \rightarrow ((A \vee C) \vee (B \vee C))$ ;
- (д)  $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ .

**ML 58.** Заменяем 11-ую аксиому  $A \vee \neg A$  на  $\neg\neg A \rightarrow A$ . Покажите, что множество выводимых формул не изменится.

**ML 38.** Докажите, что существует такое множество  $S \subseteq \mathbb{N}$ , что для любого бесконечного перечислимого множества  $A$  множества  $A \cap S$  и  $A \setminus S$  имеют бесконечный размер.

**ML 46.** Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов  $(\mathbb{Q}, =, +)$ ? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

**ML 47.** Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов  $(\mathbb{Q}, =, S)$ , где  $S$  — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

**ML 49.** Пусть  $T$  теория следующего языка:  $\{<, R, B\}$ , где  $R$  (red) и  $B$  (blue) унарные предикаты.

$T$  содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

$$\forall xy\exists zw(x < z < w < y \wedge R(z) \wedge B(w))$$

$$\forall x (R(x) \vee B(x))$$

$$\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg B(x)).$$

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

**ML 51.** Будет ли интерпретация  $(\mathbb{N}, =, <)$  элементарно эквивалентна:  $(\mathbb{N} + \mathbb{Z}, =, <)$ .

**ML 52.** Будет ли интерпретация  $(\mathbb{Q}, =, <)$  элементарно эквивалентна:

(б)  $(\mathbb{Q} + \mathbb{R}, =, <)$ .