Задание 12 (на 30.11, в письменном виде).

ML 59. Пусть сигнатура содержит только одноместные предикатные символы. Покажите, что:

(а) всякая выполнимая формула, содержащая n предикатных символов, выполнима и в интерпретации, в носителе которой не более 2^n элементов;

(б) существует алгоритм, проверяющий выполнимость таких формул.

ML 60. Покажите, что:

(а) если формула $A(x)$ выводима, то выводима и формула $\forall x A(x)$;

(б) множество выводимых формул не изменится, если мы добавим правило обобщения $\frac{A(x)}{\forall x A(x)}$, а правила Бернайса заменим на две новые аксиомы: $(\forall x(A \to B)) \to (A \to \forall x B)$ и $(\exists x(B \to A)) \to (\exists x B \to A)$, в этих аксиомах x не входит в A свободно.

ML 61. Покажите, что:

(а) если $A \to B$ выводима, то и $\exists x A \to \exists x B$ выводима;

(б) формула $\forall x A(x) \to \forall y A(y)$ выводима.

ML 62. Приведите пример формулы, которая истинна во всех интерпретациях с конечным носителем, но не является общезначимой.

Пусть I — интерпретация. Теорией $Th(I)$ называется множество замкнутых формул, которые истины в интерпретации I.

ML 63. Постройте две неизоморфные интерпретации теории $Th(\mathbb{Q}, <, =)$ (плотный линейный порядок без первого и последнего элемента) мощности континуум.

ML 38. Докажите, что существует такое множество $S \subseteq \mathbb{N}$, что для любого бесконечного перечислимого множества A множества $A \cap S$ и $A \setminus S$ имеют бесконечный размер.

ML 46. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

ML 47. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 49. Пусть T теория следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты.

T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

$$\forall xy \exists zw(x < z < w < y \ \wedge\ R(z) \ \wedge\ B(w))$$

$$\forall x\ (R(x) \ \vee\ B(x))$$

$$\forall x\ (R(x) \leftrightarrow \neg B(x)).$$

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

$\boxed{\textbf{ML 51.}}$ Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N}+\mathbb{Z}, =, <)$.

$\boxed{\textbf{ML 52.}}$ Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:

(б) $(\mathbb{Q}+\mathbb{R}, =, <)$.

$\boxed{\textbf{ML 53.}}$

(а) Покажите, что естественные интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ для всех алгебраически замкнутых полей характеристики 0 являются элементарно эквивалентными.

(б) Для двух алгебраически замкнутых полей k_1 и k_2 характеристики 0 выполняется, что k_1 является надполем поля k_2. Покажите, что естественная интерпретация $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_1 является элементарным расширением естественной интерпретации $(=, +, *, 0, 1)$ в поле k_2.

(в) Докажите теорему Гильберта о нулях: всякая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле характеристики ноль, имеющее решение в расширении поля, имеет решение и в самом поле.

(г) Докажите переформулировку теоремы Гильберта о нулях: если система полиномиальных уравнений $\bigwedge\limits_{i=1}^{k} P_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ не имеет решения в некотором алгебраически замкнутом поле характеристики 0, то найдутся такие многочлены $Q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, Q_k(x_1, \ldots, x_n)$, что $\sum\limits_i Q_i P_1 = 1$.

$\boxed{\textbf{ML 54.}}$ Покажите (в случае пропозициональных формул), что если $F_1, F_2, \ldots, F_n \vdash F$, то формула $(\bigwedge\limits_{i=1}^{n} F_i) \to F$ является тавтологией.

$\boxed{\textbf{ML 56.}}$ Покажите, что если формула ϕ является, то и формула, которая получится при подстановке другой формулы вместо переменной формулы ϕ, тоже будет выводимой.

$\boxed{\textbf{ML 57.}}$ Покажите, что следующие формул являются выводимыми:

(а) $A \to \neg\neg A$ и $\neg\neg\neg A \to \neg A$;

(б) $((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \wedge (B \to C))$ и $((A \to C) \wedge (B \to C)) \to ((A \vee B) \to C)$;

(в) $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge C)$ и $((A \vee B) \wedge C) \to ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$;

(г) $((A \vee C) \vee (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee C)$ и $((A \wedge B) \vee C) \to ((A \vee C) \vee (B \vee C))$;

(д) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.

$\boxed{\textbf{ML 58.}}$ Заменим 11-ую аксиому $A \vee \neg A$ на $\neg\neg A \to A$. Покажите, что множество выводимых формул не изменится.