

Листок 12. Полиномиальная иерархия.

Определение 1 Пусть A — класс языков. Класс $\mathbf{NP}^{A[k]}$ — класс языков, для которых существует полиномиальный недетерминированный алгоритм, который может обращаться к оракулу из класса A не более k раз.

ML 66. Докажите, что $\mathbf{PH} \subseteq \mathbf{PSPACE}$.

ML 67. Докажите, что $\Sigma_i^{\mathbf{P}} \subseteq \mathbf{NP}^{\Sigma_{i-1}^{\mathbf{P}}}$.

ML 68. Приведите пример разрешимого языка из $\mathbf{P/poly}$, который не лежит в \mathbf{P} .

ML 69. Докажите, что $\mathbf{NTime}[n] \neq \mathbf{PSPACE}$.

ML 70. Пусть $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}}$, докажите, что:

(а) $L \in \mathbf{NP}^{\mathbf{NP}^{[1]}}$ (подсказка: рассмотрите оракул SAT и «угадайте» ответы оракула);

(б) $\mathbf{NP}^{\mathbf{NP}} \subseteq \Sigma_2^{\mathbf{P}}$.

ML 71. Докажите, что язык булевых формул с ровно одним выполняющим набором (USAT):

(а) \mathbf{coNP} -трудным;

(б) лежит в $\mathbf{P}^{\mathbf{NP}}$.

ML 72. Докажите, что язык

$$L = \{(\phi, 1^k) \mid \text{функция, заданная формулой } \phi, \\ \text{не может быть посчитана формулой размера } k\}$$

лежит в \mathbf{PH} .

ML 23.

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\begin{bmatrix} s_i \\ t_i \end{bmatrix}$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 33. Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное счисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t , при этом для каждого вхождения переменной x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y , при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A , ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

ML 40. Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.

ML 50. Будет ли теория $\text{Th}((\mathbb{N}, <, =))$ конечно аксиоматизируемой.

ML 58. Докажите, что:

- (а) что число n простое тогда и только тогда, когда для каждого простого делителя q числа $n - 1$ существует $a \in \{2, 3, \dots, n - 1\}$ при котором $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, а $a^{\frac{n-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{n}$;

ML 60. Докажите, что существует язык, для которого любой алгоритм, работающий время $O(n^2)$ решает его правильно на менее, чем на половине входов какой-то длины, но этот язык распознается алгоритмом, работающим время $O(n^3)$.

ML 61. Докажите, что:

- (б) $\text{NSpace}[n^3] \not\subseteq \text{NSpace}[n^2]$.