

Листок 2. Перечислимые и не перечислимые множества.

ML 4. Не ссылаясь на теорему Ферма, покажите, что множество всех показателей n , для которых существует решение уравнения $x^n + y^n = z^n$ в целых положительных числах, перечислимо (как теперь известно, это множество содержит лишь числа 1 и 2).

ML 5. Диофантовым называется уравнение, имеющее вид $P(x_1, \dots, x_n) = 0$, где P — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что множество диофантовых уравнений, имеющих целые решения, перечислимо. (Оно неразрешимо: в этом состоит известный результат Ю. В. Матиясевича, явившийся решением знаменитой «10-й проблемы Гильберта»).

ML 6. Докажите, что:

- (а) объединение и пересечение перечислимых множеств перечислимо;
- (б) декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

ML 7. Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

ML 8. Приведите пример неразрешимого подмножества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с $\mathbb{N} \times \{x\}$ и с $\{x\} \times \mathbb{N}$) разрешимы.

ML 9. Приведите пример множества, которое:

- (а) не является перечислимым;
- (б) кроме того и его дополнение тоже не является перечислимым.

ML 10. Докажите, что не пустое множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно есть множество значений всюду определенной неубывающей вычислимой функции с натуральными аргументами и значениями.

ML 3. Докажите полноту секвенциального исчисления.