

Листок 8. Интерпретации.

ML 41. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Z}, =, <, +, 0, 1)$?

ML 42. Будет ли интерпретация $(\mathbb{Q}, =, <)$ элементарно эквивалентна:

(а) $(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}, =, <)$;

(б) $(\mathbb{Q} + \mathbb{R}, =, <)$.

ML 43. $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ — это две копии целых чисел, причем все числа из второй копии больше чисел из первой. Докажите, что $(\mathbb{Z}, <, =)$ элементарно эквивалентна $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}, <, =)$.

ML 44. С помощью теоремы о компактности докажите, что любой частичный порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка (т.е. до порядка, в котором любые два элемента сравнимы).

ML 45. Пусть T — теория (множество замкнутых формул) следующего языка: $\{<, R, B\}$, где R (red) и B (blue) унарные предикаты. T содержит все аксиомы плотного линейного порядка без первого и последнего элемента, а также:

1. $\forall xy (x < y) \rightarrow \exists zw (x < z < w < y \wedge R(z) \wedge B(w))$;

2. $\forall x (R(x) \vee B(x))$;

3. $\forall x (R(x) \leftrightarrow \neg B(x))$.

Докажите, что любые интерпретации данной теории на счетном множестве изоморфны.

ML 21. Докажите, что существует: счетное число не пересекающихся пересечимых множеств, никакие два из которых нельзя отделить разрешимым.

ML 23.

Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\begin{bmatrix} s_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} s_n \\ t_n \end{bmatrix}$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 33. Теперь секвенцией будем называть $\Gamma \vdash \Delta$, где Γ и Δ — это списки предикатных формул.

Добавим в секвенциальное счисление четыре новых правила которые соответствуют кванторам (см. табличку).

В правилах $(\forall\vdash)$ и $(\vdash\exists)$, $A(t/x)$ обозначает, что в формуле A переменная x заменяется на терм t , при этом для каждого вхождения переменной

x никакие переменные терма t не должны попасть в область действия кванторов по одноименным переменным (в формуле A). Например для формулы $\forall y P(x, y)$ вместо x нельзя подставить $f(y)$.

А в других двух правилах $A(y/x)$ означает, что в формуле A мы заменили все вхождения x на переменную y , при этом переменная y должна быть свежей то есть не входить ни в A , ни в другие формулы из секвенции.

Докажите корректность секвенциального исчисления (покажите, что если секвенция $\Gamma \vdash \Delta$ выводима, то в любой интерпретации либо хотя бы одна формула из Γ ложна, либо хотя бы одна формула из Δ истинна).

ML 38. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов ($\mathbb{Q}, =, +$)? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

ML 39. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов ($\mathbb{Q}, =, S$), где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 40. Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.