Листок 2. Схемная сложность.

COMP2 6. Формальной мерой сложности называется отображение $\mathrm{FC} : B_n \to \mathbb{N}$, обладающее следующими свойствами:

- $\mathrm{FC}(x_i) = 1$;
- $\mathrm{FC}(f) = \mathrm{FC}(\neg f)$;
- $\mathrm{FC}(f \vee g) \leq \mathrm{FC}(f) + \mathrm{FC}(g)$.

(а) Докажите, что $\mathrm{FC}(f \wedge g) \leq \mathrm{FC}(f) + \mathrm{FC}(g)$;
(б) Покажите, что $L(f)$ — это формальная мера сложности;
(в) (лемма Патерсона) Докажите, что для любой формальной меры сложности FC выполняется неравенство: $\mathrm{FC}(f) \leq L(f)$.

COMP2 7. Для множеств $A, B \subseteq \{0,1\}^n$ обозначим через $H(A, B)$ — множество пар соседей $\{(a, b) \in A \times B \mid \rho(a, b) = 1\}$, где ρ — расстояние Хемминга. Определим $K_{AB} = \frac{|H(A,B)|^2}{|A||B|}$ и $K(f) = \max\{K_{AB} \mid A \subseteq f^{-1}(1), B \subseteq f^{-1}(0)\}$. Докажите, что
(а) $K(f)$ — формальная мера сложности;
(б) (теорема Храпченко) $L(f) \geq K(f)$;
(в) $K(f) \leq n^2$;
(г) $L(Maj) = \Omega(n^2)$.

COMP2 8. Покажите, что представление $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} x_i$ в виде полинома $\mathbb{F}_q[x_1, \ldots, x_n]$ (q — простое число) требуют степень ровно n.

COMP2 1. Рассмотрим функцию $\mathrm{Maj} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, которая выдает 1, если не менее половины входных битов равны 1. Докажите, что существует:
(б) монотонная схема
(в) монотонная формула полиномиального размера, вычисляющая функцию Maj.

COMP2 2. Докажите, что для любой симметрической булевой функции (симметрическая функция зависит только от числа единиц во входе) существует вычисляющая ее
(а) схема
(б) монотонная схема полиномиального размера.

COMP2 3. Докажите, что любая формула в КНФ (ДНФ), которая вычисляет функцию
(б) $\mathrm{Maj}(x_1, \ldots, x_n)$ имеет экспоненциальный размер.

$\boxed{\textbf{COMP2 5.}}$ Докажите, что функция Maj не может быть вычислена при помощи схем полиномиального размера константной глубины из гейтов $\wedge, \vee, \neg$.