

### Домашняя работа 1. Принцип Дирихле.

Необходимо набрать 6 баллов.

**СОМВ 8.** (1 балл) Сколько чисел нужно выбрать из последовательности  $1, 2, \dots, 2n$  что бы среди них гарантированно нашлась хотя бы одна пара с суммой  $2n + 1$ ?

**СОМВ 9.** (1,5 балла) Доказать, что в любом  $(n + 1)$ -элементном подмножестве множества первых  $2n$  чисел обязательно найдутся по крайней мере два взаимно-простых числа.

**СОМВ 10.** (2 балла) Имеется последовательность целых чисел  $a_1, \dots, a_n$  доказать, что в ней имеется подпоследовательность  $a_k, \dots, a_{k+l}$  такая, что  $\sum_{i=k}^{k+l} a_i$  делится на  $n$ .

**СОМВ 11.** (1 балл) Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два поля, не лежащие на одной горизонтали или вертикали?

**СОМВ 12.** (1,5 балла) Объяснить комбинаторно равенство  $\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}$ . И с его помощью доказать равенство  $\sum_{k=0}^m \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}$ .

**СОМВ 13.** (1,5 балла). Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

**СОМВ 14.** (2 балла) Докажите, что  $(1 + x)^n + (1 - x)^n \leq 2^n$  при  $n \geq 1$  и  $|x| \leq 1$ .