Домашняя работа 12. Паросочетания.

Необходимо набрать 4 балла.

COMB 141. (1 балл) Доказать, что в непустом k-регулярном двудольном графе всегда существует совершенное паросочетание.

COMB 142. (2 балла) Пусть $D_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$ есть множество натуральных чисел. Известно, что среди любых трех из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое. Доказать, что эти числа можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых двух чисел одного цвета одно делилось бы на другое. Обобщить данный результат на случай, когда среди любых m чисел можно выбрать ровно два числа, одно из которых делилось бы на другое.

COMB 143. (1 балл) Пусть $A = (A_1, \ldots, A_m)$ есть набор из m подмножеств n-элементного множества Y. Системой различных представителей для A называется подмножество $\{a_1, \ldots, a_m\}$ различных элементов $a_i \in A$, таких, что для любого i элемент $a_i \in A_i$. Доказать, что A обладает такой системой тогда и только тогда, когда $|\bigcup\limits_{i\in S} A_i| \geq |S|$ для любого подмножества $S \subseteq 1, 2, \ldots, m$.

COMB 144. (1 балл) Матрицей P перестановок называется квадратная бинарная матрица, в которой ровно одна единица стоит в каждой строке и в каждом столбце. Любая такая матрица является, по сути, матричным представлением некоторой перестановки σ. Доказать, что любая квадратная матрица $n \times n$, состоящая из неотрицательных целых чисел, выражается в виде суммы k матриц перестановок тогда и только тогда, когда сумма чисел в любой строке, а также сумма чисел в любом столбце равны k.

COMB 145. (1 балл) Найти количество X-насыщенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,m}$ с долями X и Y, $|X| = n$, $|Y| = n$, $n \leq m$.