

Практика 1. Принцип Дирихле.

СОМВ 1. Внутри равностороннего треугольника со стороной в один сантиметр расположено пять точек. Доказать, что расстояние между хотя бы двумя из них меньше 0.5 сантиметров.

СОМВ 2. Узлы бесконечной клетчатой бумаги покрашены в два цвета. Доказать, что существуют две горизонтальные и две вертикальные прямые, на пересечениях которых лежат точки, покрашенные в один и тот же цвет.

СОМВ 3. На плоскости нарисовано n попарно не параллельных прямых. Доказать, угол между по крайней мере двумя из этих прямых меньше или равен величине π/n .

СОМВ 4. Сколько существует целых чисел между 0 и 999, содержащих хотя бы одну цифру 7?

СОМВ 5. Доказать следующую формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

СОМВ 6. Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали:

$$\sum_{k=0}^n \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

СОМВ 7. Используя формулу суммирования по верхнему индексу вычислить:

(а) $\sum_{i=0}^n i$;

(б) $\sum_{i=0}^n i^2$;

(в) $\sum_{i=0}^n i^3$.