с/к “Эффективные алгоритмы”
Лекция 15: Максимальное паросочетание

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ
http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/

План лекции

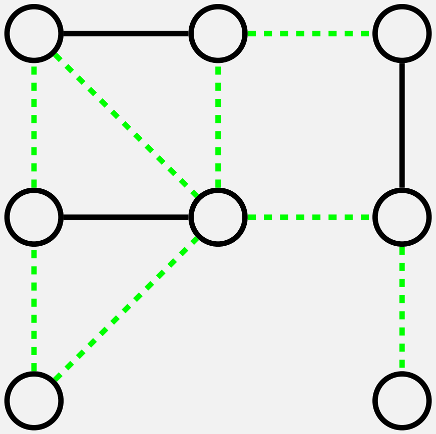
План лекции

Постановка задачи

Определение

- Сочетанием (matching) простого графа называется его подмножество рёбер, никакие два из которых не имеют общего конца.
- Задача о максимальном паросочетании (matching problem) заключается в нахождении по данному графу сочетания максимального размера.

Пример сочетания



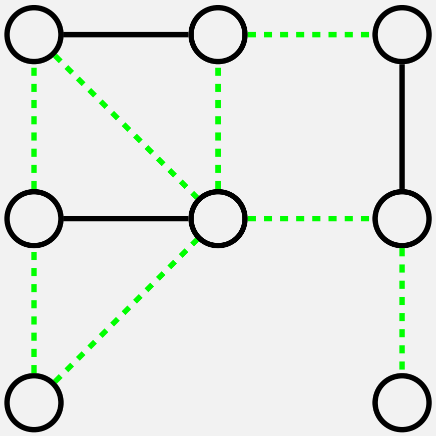
План лекции

Дополняющий путь

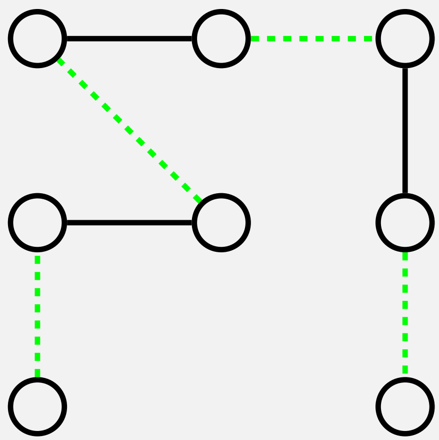
Определение

- Вершина называется свободной относительно сочетания M (free w.r.t. a matching M), если она не является концом ребра из M.
- Путь в графе называется чередующимся относительно M (alternating w.r.t. M), если в нем чередуются ребра из M и не из M.
- Путь называется дополняющим относительно M (augmenting w.r.t. M), если он является простым чередующимся путём между двумя свободными вершинами.

Пример дополняющего пути



Пример дополняющего пути



Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

$\Rightarrow$
- Пусть M, N суть немаксимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
- Рассмотрим симметрическую разность $D = M \oplus N$.
- Степень каждой вершины в D не превосходит 2.
- Значит, D является объединением циклов и путей.

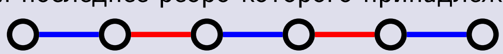
Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

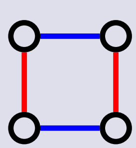
- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат N:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат M:



- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат разным сочетаниям:

- Цикл:



Завершение доказательства

Завершение доказательства

- Поскольку $|N| > |M|$, есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих N, больше, чем рёбер, принадлежащих M.
- Единственной такой компонентой является путь, оба конечных ребра которого принадлежат сочетанию N.
- А это и есть дополняющий путь относительно M. $\square$

Общий вид алгоритма

```
Maximum-Matching(G)
M ← ∅
repeat
    if есть дополняющий путь P относительно M
       then M ← M ⊕ P
       else return M
```


План лекции

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли) V_1 и V_2, так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.
- В двудольном графе каждый цикл имеет чётную длину.
- Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе сводится к задаче о максимальном потоке.

Лемма Холла

Определение

Паросочетание называется совершенным (perfect), если оно содержит все вершины графа.

Лемма Холла

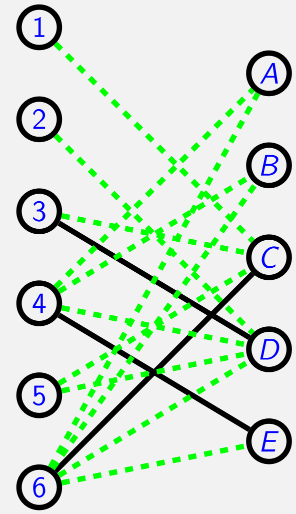
Двудольный граф с долями V_1, V_2 имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|V_1| = |V_2|$ и $(\forall U \subseteq V_1)|N(U)| \geq |U|$ (где $N(U)$ — множество соседей вершин множества U).

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

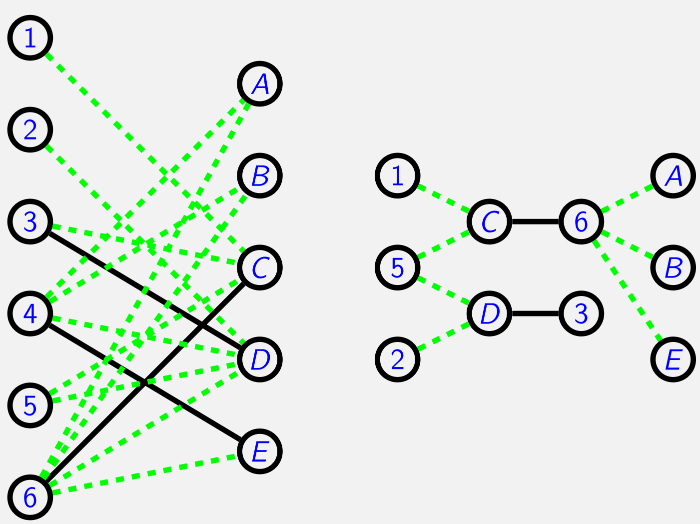
Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли V_1.
- Если на i-й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины L_i доли V_1, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_2, соединенные с L_i и не рассматривавшиеся ранее.
- Если же рассматриваются вершины L_i доли V_2, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_1, соединённые ребрами текущего паросочетания с вершинами L_i.
- Нетрудно видеть, что если будет достигнута свободная вершина доли V_2, то найден дополняющий путь. Если же свободной вершины из V_2 не нашлось, то дополняющего пути нет.

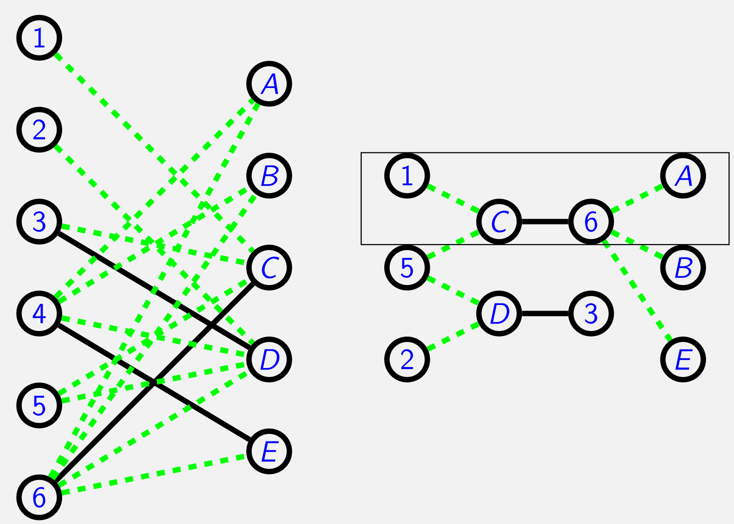
Пример



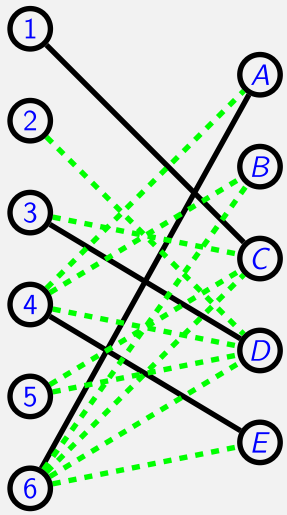
Пример



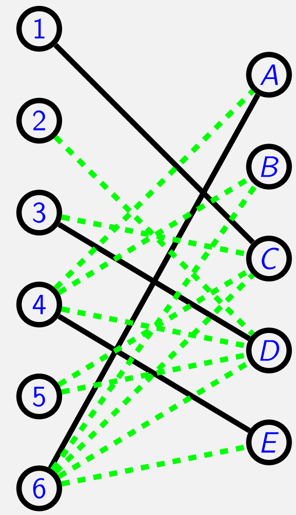
Пример

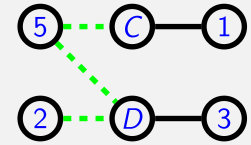


Пример

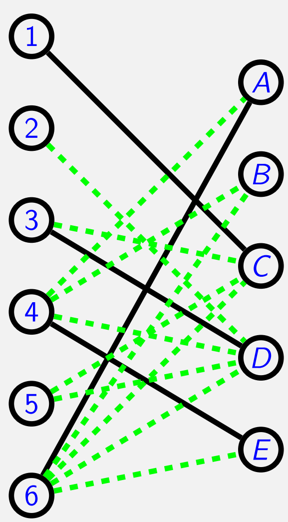


Пример





Вершинное покрытие



Вершины $\{4, 6, C, D\}$ являются минимальным вершинным покрытием.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.
- Разобьём вершины графа на три части:
  1. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_1.
  2. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_2.
  3. Оставшиеся вершины.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию M, причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли V_2 из первой части и вершины доли V_1 из второй и третьей частей.
- Несложно показать, что построенное множество вершин X является сечением и что разные вершины X принадлежат разным рёбрам M.
- Таким образом, $|M| \geq |X|$. $\square$

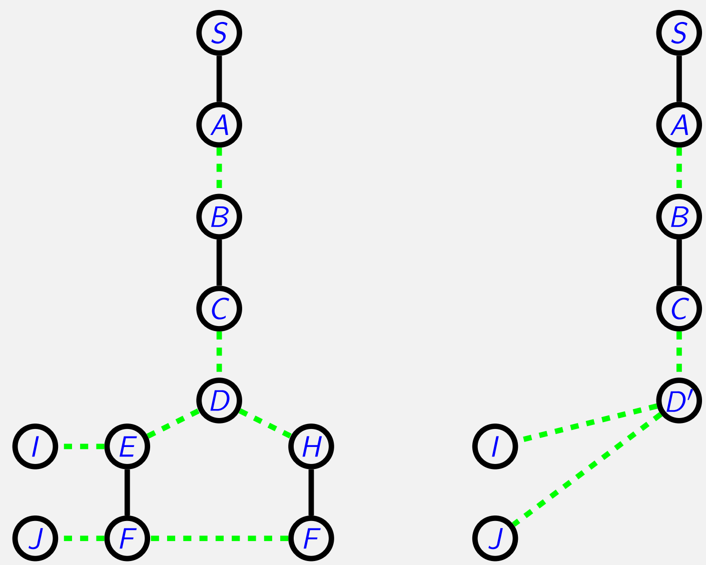
План лекции

Это были ягодки...

Определение

- Цветком относительно паросочетания M (blossom w.r.t. M) называется цикл нечётной длины с r рёбрами M и $r+1$ ребром не из M.
- Основанием цветка (blossom base) называется вершина цветка, в которой встречаются два ребра не из сочетания.
- Стянутым цветком (shrunken blossom) называется вершина в стянутом графе, соответствующая цветку в исходном графе.

Пример



Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

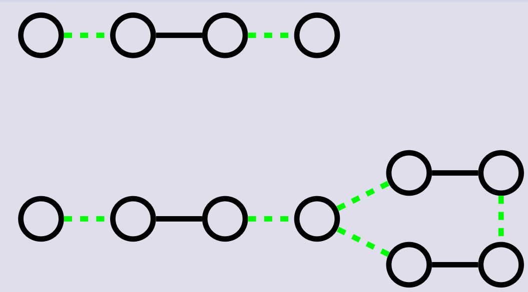
- Допустим сперва, что M' не максимально в G'. Из этого следует, что в G' есть дополняющий путь P' (относительно M').
- Если P' не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно M в G.
- Допустим, что P' содержит стянутый цветок B.
- Поскольку стянутый цветок B не пересекается с паросочетанием M', он является конечной вершиной пути P'.

Раскрытие цветка

Доказательство

- Легко видеть, что при раскрытии цветка путь P' можно дополнить до дополняющего в G.

Пример



Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.
- Значит, в G есть дополняющий путь P относительно M.
- Считаем, что P пересекает цветок B (иначе всё и так ясно).
- Поскольку цветок содержит ровно одну вершину не из паросочетания, хотя бы один из концов P (назовём его w) не лежит в цветке.
- Тогда путь от w до первого пересечения с цветком является дополняющим в G'. □

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.
- Будем строить лес F (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину U.
- Ребра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин U.
- Вершины, находящиеся на чётном расстоянии, будут иметь степень 2 (одно ребро из паросочетания, второе — нет).
- Назовём такие вершины внутренними, оставшиеся — внешними.

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

1. **Внешняя вершина x соединена с вершиной y не из F.** Добавить рёбра (x, y) и $(y, z) \in M$ в F.
2. **Соединены две внешние вершины из разных компонент.** Корни этих компонет соединены дополняющим путём.
3. **Соединены две внешние вершины x и y из одной компоненты.** Рассмотрим цикл C компоненты, содержащий вершины x, y, а также путь, ведущий из корня компоненты в этот цикл. Изменить рёбра сочетания вдоль этого пути (размер сочетания при этом не изменится) и стянуть найденный цветок.
4. **Каждая внешняя вершина соединена только со внутренними вершинами.** Значит, текущее паросочетание максимально.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.
- Ясно, что $q - p = |U|$.
- Итак, внешних вершин на $|U|$ больше, чем внутренних.
- Но каждая внешняя вершина может сочетаться только со внутренней. Значит, хотя бы для $|U|$ из них не найдется пары.
- Поскольку в текущем паросочетании пары нет как раз у $|U|$ вершин, то оно максимально.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более $|V|$ раз.
- Стягивается не более $|V|$ цветков.
- Нахождение цветка или дополняющего пути требует времени $O(|E|)$.
- Итого, $O(|V|^2|E|)$. □

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.
- В двудольном графе размер максимального паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия.
- В общем случае максимальное паросочетание находится за время $O(|V|^4)$.