с/к “Эффективные алгоритмы”

Лекция 15: Максимальное паросочетание

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ

http://logic.pdmi.ras.ru/∼infclub/

План лекции

1. Постановка задачи

План лекции

План лекции

1. Постановка задачи
2. Дополняющие пути
3. Случай двудольных графов

План лекции

План лекции

1. Постановка задачи
2. Дополняющие пути
3. Случай двудольных графов
4. Общий случай

Постановка задачи

Определение

Постановка задачи

Определение

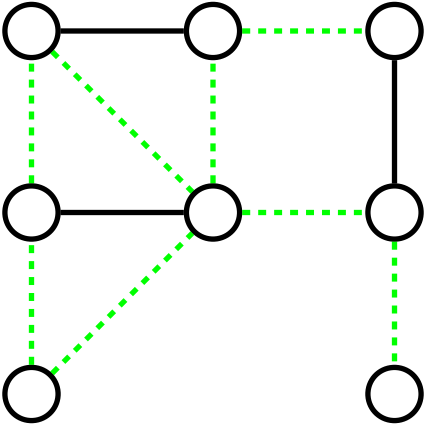
- Сочетанием (matching) простого графа называется его подмножество рёбер, никакие два из которых не имеют общего конца.

Постановка задачи

Определение

- Сочетанием (matching) простого графа называется его подмножество рёбер, никакие два из которых не имеют общего конца.
- Задача о максимальном паросочетании (matching problem) заключается в нахождении по данному графу сочетания максимального размера.

Пример сочетания



План лекции

Дополняющий путь

Определение

Дополняющий путь

Определение

- Вершина называется свободной относительно сочетания M (free w.r.t. a matching M), если она не является концом ребра из M.

Дополняющий путь

Определение

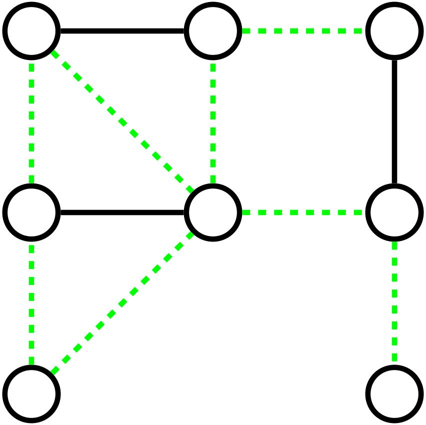
- Вершина называется свободной относительно сочетания M (free w.r.t. a matching M), если она не является концом ребра из M.
- Путь в графе называется чередующимся относительно M (alternating w.r.t. M), если в нем чередуются ребра из M и не из M.

Дополняющий путь

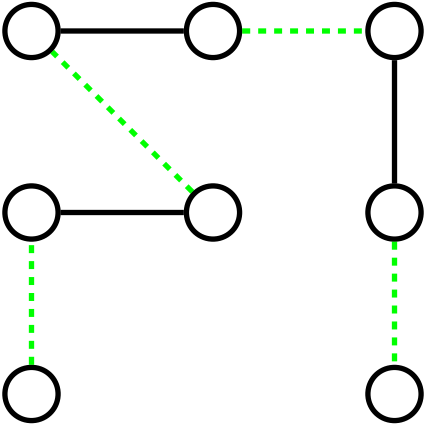
Определение

- Вершина называется свободной относительно сочетания M (free w.r.t. a matching M), если она не является концом ребра из M.
- Путь в графе называется чередующимся относительно M (alternating w.r.t. M), если в нем чередуются ребра из M и не из M.
- Путь называется дополняющим относительно M (augmenting w.r.t. M), если он является простым чередующимся путём между двумя совободными вершинами.

Пример дополняющего пути



Пример дополняющего пути



Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

$\Rightarrow$
- Пусть M, N суть немаксимальное и максимальное паросочетания, соответственно.

Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

$\Rightarrow$
- Пусть M, N суть немаксимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
- Рассмотрим симметрическую разность $D = M \oplus N$.

Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

$\Rightarrow$
- Пусть M, N суть немаксимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
- Рассмотрим симметрическую разность $D = M \oplus N$.
- Степень каждой вершины в D не превосходит 2.

Основное свойство дополняющего пути

Теорема

Паросочетание M не является максимальным тогда и только тогда, когда в графе есть дополняющий путь относительно M.

Доказательство

$\Leftarrow$ Если P — дополняющий путь, то симметрическая разность $M \oplus P$ (то есть рёбра, принадлежащие ровно одному из этих множеств) является сочетанием, причём $|M \oplus P| = |M| + 1$.

$\Rightarrow$
- Пусть M, N суть немаксимальное и максимальное паросочетания, соответственно.
- Рассмотрим симметрическую разность $D = M \oplus N$.
- Степень каждой вершины в D не превосходит 2.
- Значит, D является объединением циклов и путей.

Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат N:

Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат N:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат M:

Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат N:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат M:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат разным сочетаниям:

Типы компонент симметрической разности

Типы циклов и путей в симметрической разности

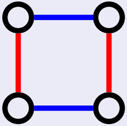
Красным цветом будем обозначать рёбра сочетания N, синим — рёбра M. Типы компонент:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат N:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат M:

- Путь, первое и последнее ребро которого принадлежат разным сочетаниям:

- Цикл:



Завершение доказательства

Завершение доказательства

Завершение доказательства

Завершение доказательства

- Поскольку $|N| > |M|$, есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих N, больше, чем рёбер, принадлежащих M.

Завершение доказательства

Завершение доказательства

- Поскольку $|N| > |M|$, есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих N, больше, чем рёбер, принадлежащих M.
- Единственной такой компонентой является путь, оба конечных ребра которого принадлежат сочетанию N.

Завершение доказательства

Завершение доказательства

- Поскольку $|N| > |M|$, есть хотя бы одна компонента, в которой рёбер, принадлежащих N, больше, чем рёбер, принадлежащих M.
- Единственной такой компонентой является путь, оба конечных ребра которого принадлежат сочетанию N.
- А это и есть дополняющий путь относительно M. $\square$

Общий вид алгоритма

```
MAXIMUM-MATCHING(G)
M ← ∅
repeat
        if есть дополняющий путь P относительно M
           then M ← M ⊕ P
           else return M
```

План лекции

1. Постановка задачи
2. Дополняющие пути
3. Случай двудольных графов
4. Общий случай

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли) V_1 и V_2, так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли) V_1 и V_2, так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.
- В двудольном графе каждый цикл имеет чётную длину.

Случай двудольных графов

Случай двудольных графов

- Граф называется двудольным, если его множество вершин может быть разбито на две части (доли) V_1 и V_2, так что любое ребро графа соединяет вершины разных долей.
- В двудольном графе каждый цикл имеет чётную длину.
- Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе сводится к задаче о максимальном потоке.

Лемма Холла

Определение

Паросочетание называется совершенным (perfect), если оно содержит все вершины графа.

Лемма Холла

Определение

Паросочетание называется **совершенным** (perfect), если оно содержит все вершины графа.

Лемма Холла

Двудольный граф с долями V_1, V_2 имеет совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|V_1| = |V_2|$ и $(\forall U \subseteq V_1)|N(U)| \geq |U|$ (где $N(U)$ — множество соседей вершин множества U).

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли V_1.

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли V_1.
- Если на i-й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины L_i доли V_1, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_2, соединенные с L_i и не рассматривавшиеся ранее.

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

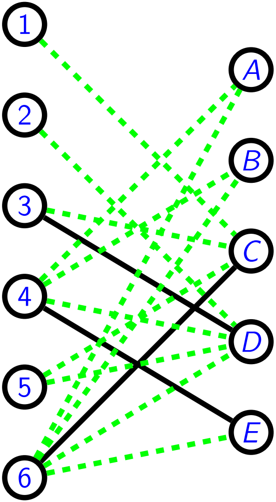
- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли V_1.
- Если на i-й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины L_i доли V_1, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_2, соединенные с L_i и не рассматривавшиеся ранее.
- Если же рассматриваются вершины L_i доли V_2, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_1, соединённые ребрами текущего паросочетания с вершинами L_i.

Поиск дополняющего пути в двудольном графе

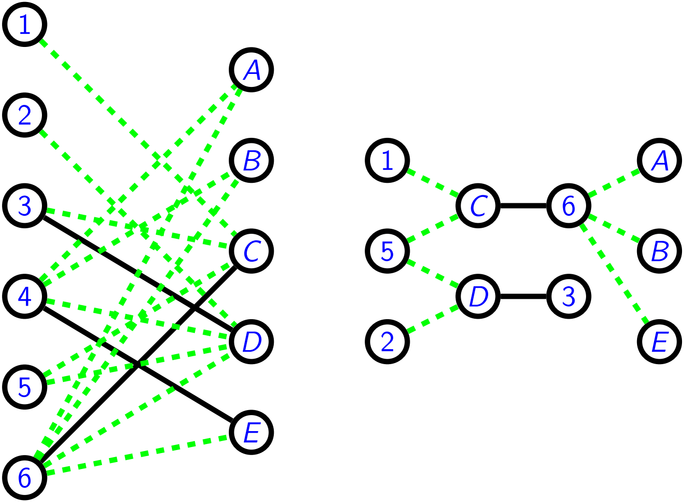
Поиск дополняющего пути в двудольном графе

- Модифицируем поиск в ширину так, чтобы он рассматривал только дополняющие пути.
- Начинаем со свободных вершин доли V_1.
- Если на i-й итерации поиска в ширину рассматриваются вершины L_i доли V_1, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_2, соединенные с L_i и не рассматривавшиеся ранее.
- Если же рассматриваются вершины L_i доли V_2, то на следующем шаге будем рассматривать вершины доли V_1, соединённые ребрами текущего паросочетания с вершинами L_i.
- Нетрудно видеть, что если будет достигнута свободная вершина доли V_2, то найден дополняющий путь. Если же свободной вершины из V_2 не нашлось, то дополняющего пути нет.

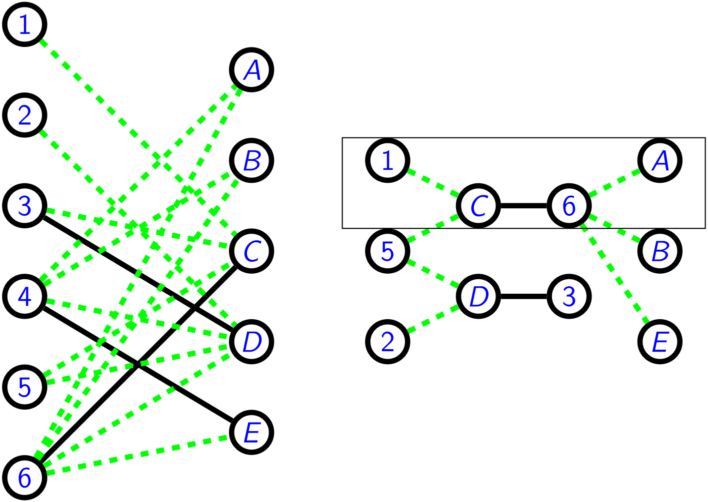
Пример



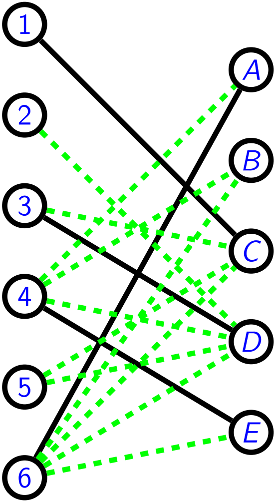
Пример



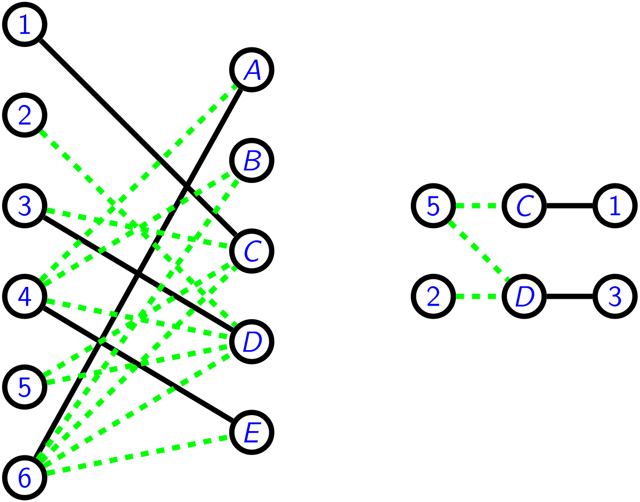
Пример



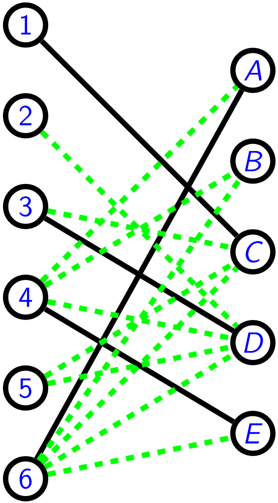
Пример



Пример



Вершинное покрытие



Вершины $\{4, 6, C, D\}$ являются минимальным вершинным покрытием.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.
- Разобьём вершины графа на три части:

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.
- Разобьём вершины графа на три части:
    1. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_1.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.
- Разобьём вершины графа на три части:
  1. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_1.
  2. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_2.

Теорема о вершинном покрытии

Теорема

В двудольном графе размер минимального вершинного покрытия равен размеру максимального паросочетания.

Доказательство

- Ясно, что размер любого паросочетания не больше размера любого покрытия.
- Предъявим покрытие X, размер которого не превосходит размера максимального паросочетания M.
- Разобьём вершины графа на три части:
  1. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_1.
  2. Вершины, достижимые поиском в ширину из свободных вершин доли V_2.
  3. Оставшиеся вершины.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию M, причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию M, причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли V_2 из первой части и вершины доли V_1 из второй и третьей частей.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию M, причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли V_2 из первой части и вершины доли V_1 из второй и третьей частей.
- Несложно показать, что построенное множество вершин X является сечением и что разные вершины X принадлежат разным рёбрам M.

Доказательство (продолжение)

Доказательство

- Первые две части не пересекаются, поскольку в графе нет дополняющего пути.
- Все вершины третьей части принадлежат паросочетанию M, причём сочетаются они с вершинами же из третьей части.
- Возьмем тогда вершины доли V_2 из первой части и вершины доли V_1 из второй и третьей частей.
- Несложно показать, что построенное множество вершин X является сечением и что разные вершины X принадлежат разным рёбрам M.
- Таким образом, $|M| \geq |X|$. □

План лекции

Это были ягодки...

Определение

Это были ягодки...

Определение

- Цветком относительно паросочетания M (blossom w.r.t. M) называется цикл нечётной длины с r рёбрами M и $r+1$ ребром не из M.

Это были ягодки...

Определение

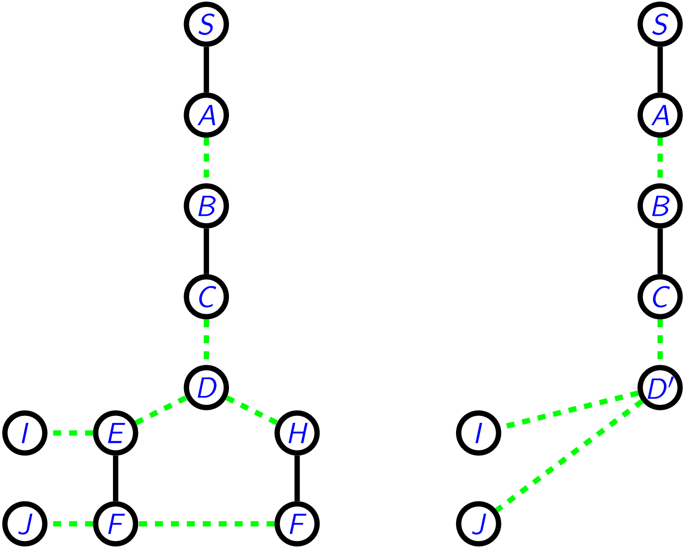
- Цветком относительно паросочетания M (blossom w.r.t. M) называется цикл нечётной длины с r рёбрами M и $r+1$ ребром не из M.
- Основанием цветка (blossom base) называется вершина цветка, в которой встречаются два ребра не из сочетания.

Это были ягодки...

Определение

- Цветком относительно паросочетания M (blossom w.r.t. M) называется цикл нечётной длины с r рёбрами M и $r+1$ ребром не из M.
- Основанием цветка (blossom base) называется вершина цветка, в которой встречаются два ребра не из сочетания.
- Стянутым цветком (shrunken blossom) называется вершина в стянутом графе, соответствующая цветку в исходном графе.

Пример



Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

- Допустим сперва, что M' не максимально в G'. Из этого следует, что в G' есть дополняющий путь P' (относительно M').

Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

- Допустим сперва, что M' не максимально в G'. Из этого следует, что в G' есть дополняющий путь P' (относительно M').
- Если P' не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно M в G.

Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

- Допустим сперва, что M' не максимально в G'. Из этого следует, что в G' есть дополняющий путь P' (относительно M').
- Если P' не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно M в G.
- Допустим, что P' содержит стянутый цветок B.

Стягивание цветков

Теорема

Пусть M — паросочетание графа G, B — цветок в G. Предположим, что основание цветка не принадлежит M. Пусть граф G' и паросочетание M' получаются из G и M стягиванием цветка B. Тогда M' является максимальным в G' тогда и только тогда, когда M максимально в G.

Доказательство

- Допустим сперва, что M' не максимально в G'. Из этого следует, что в G' есть дополняющий путь P' (относительно M').
- Если P' не содержит стянутого цветка, то он является и дополняющим путём относительно M в G.
- Допустим, что P' содержит стянутый цветок B.
- Поскольку стянутый цветок B не пересекается с паросочетанием M', он является конечной вершиной пути P'.

Раскрытие цветка

Доказательство

Раскрытие цветка

Доказательство

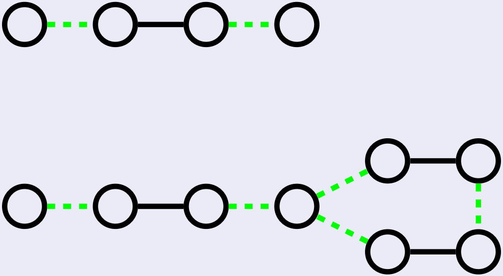
- Легко видеть, что при раскрытии цветка путь P' можно дополнить до дополняющего в G.

Раскрытие цветка

Доказательство

- Легко видеть, что при раскрытии цветка путь P' можно дополнить до дополняющего в G.

Пример



Продолжение доказательства

Доказательство

Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.

Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.
- Значит, в G есть дополняющий путь P относительно M.

Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.
- Значит, в G есть дополняющий путь P относительно M.
- Считаем, что P пересекает цветок B (иначе всё и так ясно).

Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.
- Значит, в G есть дополняющий путь P относительно M.
- Считаем, что P пересекает цветок B (иначе всё и так ясно).
- Поскольку цветок содержит ровно одну вершину не из паросочетания, хотя бы один из концов P (назовём его w) не лежит в цветке.

Продолжение доказательства

Доказательство

- Допустим теперь, что M не является максимальным в G.
- Значит, в G есть дополняющий путь P относительно M.
- Считаем, что P пересекает цветок B (иначе всё и так ясно).
- Поскольку цветок содержит ровно одну вершину не из паросочетания, хотя бы один из концов P (назовём его w) не лежит в цветке.
- Тогда путь от w до первого пересечения с цветком является дополняющим в G'. □

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.
- Будем строить лес F (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину U.

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.
- Будем строить лес F (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину U.
- Ребра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин U.

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.
- Будем строить лес F (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину U.
- Ребра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин U.
- Вершины, находящиеся на чётном расстоянии, будут иметь степень 2 (одно ребро из паросочетания, второе — нет).

Общие идеи алгоритма

Общие идеи алгоритма

- Мы модифицируем поиск в ширину так, чтобы он находил цветки. Каждый обнаруженный цветок стягивается в вершину, после чего поиск продолжается.
- Ясно, что дополняющий путь в стянутом графе легко развернуть в дополняющий путь в исходном графе.
- Обозначим через U множество вершин не из паросочетания M.
- Будем строить лес F (последовательно добавляя рёбра из паросочетания и не из паросочетания), содержащий по компоненте на каждую вершину U.
- Ребра паросочетания, таким образом, будут на чётном расстоянии от вершин U.
- Вершины, находящиеся на чётном расстоянии, будут иметь степень 2 (одно ребро из паросочетания, второе — нет).
- Назовём такие вершины внутренними, оставшиеся — внешними.

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

1. **Внешняя вершина x соединена с вершиной y не из F.**
   Добавить рёбра (x, y) и $(y, z) \in M$ в F.

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

1. **Внешняя вершина x соединена с вершиной y не из F.** Добавить рёбра (x, y) и $(y, z) \in M$ в F.
2. **Соединены две внешние вершины из разных компонент.** Корни этих компонет соединены дополняющим путём.

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

1. **Внешняя вершина x соединена с вершиной y не из F.** Добавить рёбра (x, y) и $(y, z) \in M$ в F.
2. **Соединены две внешние вершины из разных компонент.** Корни этих компонет соединены дополняющим путём.
3. **Соединены две внешние вершины x и y из одной компоненты.** Рассмотрим цикл C компоненты, содержащий вершины x, y, а также путь, ведущий из корня компоненты в этот цикл. Изменить рёбра сочетания вдоль этого пути (размер сочетания при этом не изменится) и стянуть найденный цветок.

Описание алгоритма

Описание алгоритма

Рассмотрим множество соседей внешних вершин. Возможны четыре случая:

1. **Внешняя вершина x соединена с вершиной y не из F.** Добавить рёбра (x, y) и $(y, z) \in M$ в F.
2. **Соединены две внешние вершины из разных компонент.** Корни этих компонет соединены дополняющим путём.
3. **Соединены две внешние вершины x и y из одной компоненты.** Рассмотрим цикл C компоненты, содержащий вершины x, y, а также путь, ведущий из корня компоненты в этот цикл. Изменить рёбра сочетания вдоль этого пути (размер сочетания при этом не изменится) и стянуть найденный цветок.
4. **Каждая внешняя вершина соединена только со внутренними вершинами.** Значит, текущее паросочетание максимально.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.
- Ясно, что $q - p = |U|$.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.
- Ясно, что $q - p = |U|$.
- Итак, внешних вершин на $|U|$ больше, чем внутренних.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.
- Ясно, что $q - p = |U|$.
- Итак, внешних вершин на $|U|$ больше, чем внутренних.
- Но каждая внешняя вершина может сочетаться только со внутренней. Значит, хотя бы для $|U|$ из них не найдется пары.

Пояснение к последнему шагу

Пояснение к последнему шагу

- Почему же паросочетание является максимальным, если каждая внешняя вершина соединена только со внутренними?
- Пусть F содержит p внутренних вершин и q внешних.
- Ясно, что $q - p = |U|$.
- Итак, внешних вершин на $|U|$ больше, чем внутренних.
- Но каждая внешняя вершина может сочетаться только со внутренней. Значит, хотя бы для $|U|$ из них не найдется пары.
- Поскольку в текущем паросочетании пары нет как раз у $|U|$ вершин, то оно максимально.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более $|V|$ раз.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более $|V|$ раз.
- Стягивается не более $|V|$ цветков.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более $|V|$ раз.
- Стягивается не более $|V|$ цветков.
- Нахождение цветка или дополняющего пути требует времени $O(|E|)$.

Анализ времени работы

Лемма

Время работы представленного алгоритма есть $O(|V|^4)$.

Доказательство

- На каждом шаге мы либо увеличиваем размер F, либо уменьшаем размер G, либо находим дополняющий путь, либо заканчиваем работу.
- Дополняющий путь находится не более $|V|$ раз.
- Стягивается не более $|V|$ цветков.
- Нахождение цветка или дополняющего пути требует времени $O(|E|)$.
- Итого, $O(|V|^2|E|)$. $\square$

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.
- В двудольном графе размер максимального паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия.

Что мы узнали за сегодня?

Что мы узнали за сегодня?

- Основным моментом в поиске максимального паросочетания является поиск дополняющих путей.
- Искать дополняющие пути в двудольном графе гораздо легче.
- В двудольном графе размер максимального паросочетания совпадает с размером минимального вершинного покрытия.
- В общем случае максимальное паросочетание находится за время $O(|V|^4)$.

Спасибо за внимание!