с/к “Эффективные алгоритмы”

Лекция 4: Задача выполнимости

А. Куликов

Computer Science клуб при ПОМИ
http://logic.pdmi.ras.ru/~infclub/

План лекции

План лекции

Формула в КНФ

Определение

- Пропозициональной или Булевой (propositional, Boolean) переменной называется переменная, принимающая значения `true` (1) и `false` (0).
- Литералом (literal) называется Булева переменная x или ее отрицание $\neg x$.
- Клозом (clause) называется дизъюнкция конечного множества литералов, не содержащего одновременно переменной и ее отрицания.
- k-клозом (k-clause) называется клоз, содержащий ровно k литералов.
- Формулой в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) (formula in conjunctive normal form, CNF) называется конъюнкция конечного множества клозов.

Меры сложности формул

- $n(F)$, $N(F)$ — кол-во различных переменных в F.
- $m(F)$, $K(F)$ — кол-во клозов в F.
- $l(F)$, $L(F)$ — кол-во литералов в (длина) F.

Задача выполнимости

Определение

- Задача пропозициональной выполнимости (Boolean satisfiability problem, SAT): определить, выполнима ли данная формула в КНФ, то есть существует ли набор Булевых значений переменным формулы, выполняющий формулу. Такой набор называют выполняющим (satisfying assignment), а формулу, для которой такой набор существует, — выполнимой (satisfiable).
- Задача максимальной выполнимости (maximum satisfiability problem, SAT): по данной формуле определить, какое максимальное количество ее клозов может быть выполнено.
- k-SAT, MAX-k-SAT — частные случаи соответствующих задач, когда все клозы входной формулы содержат не более k литералов.

Пример

Пример

- $F_1 = (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x) \wedge (\neg y \vee z)$
  - $n(F_1) = 3$, $m(F_1) = 3$, $l(F_1) = 6$
  - F_1 выполнима: $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$
- $F_2 = (x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
  - $n(F_2) = 2$, $m(F_2) = 4$, $l(F_1) = 8$
  - F_2 невыполнима, но три клоза можно выполнить

NP-трудность

- Первая известная NP-полная задача (Кук, 1971).
- 3-SAT тоже NP-полна.
- 2-SAT может быть решена за линейное время.
- MAX-2-SAT NP-трудна, даже если каждая переменная встречается в формуле не более трех раз.

Важность задачи

- http://www.satisfiability.org/ — The International Conferences on Theory and Applications of Satisfiability Testing.
- http://www.satcompetition.org/ — The international SAT Competitions web page.
- http://www.isa.ewi.tudelft.nl/Jsat — Journal on Satisfiability, Boolean Modeling and Computation.
- http://www.satlib.org/ — The Satisfiability Library.
- http://www.satlive.org/ — Up-to-date links for the Satisfiability Problem.
- http://www.qbflib.org/ — The Quantified Boolean Formulas Satisfiability Library.

План лекции

Сведения

- Многие известные задачи из NP очень просто сводятся к SAT или MAX-SAT.
- Сведя задачу к SAT, на практике можно воспользоваться SAT-солвером.
- Такой подход иногда помогает, иногда — нет.

План лекции

Японские кроссворды

Определение

Решение японского кроссворда (japanese puzzle) заключается в восстановлении картинки по длинам блоков подряд идущих закрашенных клеток в строках и столбцах.

Сведение к SAT

- дано поле $n \times m$
- достаточно научиться кодировать тот факт, что в i-й строке закрашены блоки длины $a_1, \dots, a_t$
- введем такие переменные:
  - x_{ij} — клетка (i, j) закрашена
  - y_{ijp} — p-й блок строки i начинается в клетке j

Сведение к SAT (продолжение)

итак, дана строка i с блоками $a_1, \dots, a_t$

- p-й блок начинается ровно в одной клетке:

$$(y_{i1p} \vee y_{i2p} \vee \dots \vee y_{imp}) \wedge \{(\neg y_{ijp} \vee \neg y_{ikp})\}_{j \neq k}$$

- $(p+1)$-й блок начинается позже конца p-го:

$$\{(\neg y_{ij(p+1)} \vee \neg y_{i(j+k)p})\}_{k \geq 0}$$

- если p-й блок начинается в клетке j, то соответствующие a_p клеток закрашены:

$$\{(\neg y_{ijp} \vee x_{i(j+k)})\}_{0 \leq k < a_p}$$

- если клетка не принадлежит ни одному из блоков, то она не закрашена:

$$(y_{i(j-a_1+1)1} \vee \dots \vee y_{ij1} \vee \dots \vee y_{i(j-a_t+1)p} \vee \dots \vee y_{ijt} \vee \neg x_{ij})$$

Замечание

- если какой-то индекс “вылезает”, то соответствующим переменным просто присваиваем значение 0
- можно сводить более эффективно

План лекции

Игра Eternity

Определение

Нужно замостить квадрат заданным набором доминошек так, чтобы узоры на граничащих частях доминошек совпадали.

Сведение к SAT

дан квадрат $n \times n$ и n^2 доминошек

- перенумеруем все клетки и доминошки числами от 1 до n^2
- заводим два типа переменных:
  - x_{ij} — в i-й клетке стоит j-я доминошка
  - y_{jk} — j-я доминошка в "положении" k, $1 \leq k \leq 4$ (например, так: $k = 1$ — не повернута, $k = 2$ — повернута на $\pi/2$ по часовой, $k = 3$ — на π, $k = 4$ — на $\pi/2$ против часовой)

Сведение к SAT

- каждая доминошка находится ровно в одном "положении":

$$(y_{j1} \lor y_{j2} \lor y_{j3} \lor y_{j4}) \land \{(\neg y_{jp} \lor \neg y_{jq})\}_{p \neq q}$$

- каждая доминошка стоит хотя бы в одной клетке:

$$\{(x_{1j} \lor x_{2j} \lor \dots \lor x_{n^2 j})\}_{j \in [n^2]}$$

- в каждой клетке стоит хотя бы одна доминошка:

$$\{(x_{i1} \lor x_{i2} \lor \dots \lor x_{in^2})\}_{i \in [n^2]}$$

- доминошка не стоит в двух клетках одновременно:

$$\{(\neg x_{pj} \lor \neg x_{qj})\}_{p \neq q}$$

Сведение к SAT (продолжение)

- в клетке одновременно не стоят две доминошки:

$$\{(\neg x_{ip} \vee \neg x_{iq})\}_{p \neq q}$$

- две доминошки должны граничить равными ребрами:

$$\{(\neg x_{i_1 j_1} \vee \neg x_{i_2 j_2} \vee \neg y_{i_1 k_1} \vee \neg y_{i_2 k_2})\},$$

если клетки i_1 и i_2 — соседи и при постановке туда доминошек j_1 и j_2 в “положениях”, соответственно, k_1 и k_2 нарушается узор

Не все так просто, тем не менее

- итак, мы записали игру Eternity в виде задачи выполнимости конкретной формулы при помощи полиномиального сведения
- осталось напустить на полученную формулу какой-нибудь эффективный SAT-солвер
- но в чем же тогда подвох?
- давайте примерно оценим длину полученной формулы

Оценка длины

$(y_{j1} \vee y_{j2} \vee y_{j3} \vee y_{j4}) \wedge \{(\neg y_{jp} \vee \neg y_{jq})\}_{p \neq q}$	$(4 + 2 \cdot 6)n^2$
$\{(x_{1j} \vee x_{2j} \vee \dots \vee x_{n^2 j})\}_{j \in [n^2]}$	$n^2 \cdot n^2$
$\{(x_{i1} \vee x_{i2} \vee \dots \vee x_{in^2})\}_{i \in [n^2]}$	$n^2 \cdot n^2$
$\{(\neg x_{pj} \vee \neg x_{qj})\}_{p \neq q}$	$n^2 \cdot \binom{n}{2}$
$\{(\neg x_{ip} \vee \neg x_{iq})\}_{p \neq q}$	$n^2 \cdot \binom{n}{2}$
$\{(\neg x_{i_1 j_1} \vee \neg x_{i_2 j_2} \vee \neg y_{i_1 k_1} \vee \neg y_{i_2 k_2})\}$	$\sim n^2 \cdot n^2 \cdot n^2$

Итого, порядок длины формулы будет n^6, что при $n = 16$ составляеят $16^6 = 2^{24} = 16\,777\,216$.

План лекции

Задача о максимальном разрезе

Определение

Задача о максимальном разрезе (maximum cut, MAX-CUT) заключается в нахождении такого разбиения вершин графа на две части, при котором количество ребер, концы которых принадлежат разным частям, максимально.

NP-трудность

- Одна из знаменитых 21-й NP-полной задачи Карпа.
- Остается NP-полной даже на графах степени 3.

Сведение к MAX-2-SAT

- каждой вершине u графа $G(V,E)$ поставим в соответствие переменную x_u ($x_u = 1$ — вершина u принадлежит первой части)
- для каждого ребра (u,v) запишем два клоза $(x_u \vee x_v)$, $(\neg x_u \vee \neg x_v)$
- видно, что набор значений переменным u, v выполняет оба клоза, когда u и v в разных частях, и выполняет только один из них — когда в одной
- таким образом, максимальное количество одновременно выполнимых клозов полученной формулы равно $|E| + |\text{MAX-CUT}(G)|$

План лекции

Что мы узнали за сегодня?

- Многие известные задачи из NP очень просто сводятся к SAT или MAX-SAT.
- Сведя задачу к SAT, на практике можно воспользоваться SAT-солвером.
- Сведения:
  - японские кроссворды, игра Eternity — к SAT
  - задача о максимальном разрезе — к MAX-SAT