Алгоритмы и структуры данных

Лекция 3: Быстрое преобразование Фурье

А. Куликов

Академия современного программирования

План лекции

Умножение многочленов

Умножение многочленов

- Итак, мы научились быстро перемножать числа и матрицы. Теперь будем учиться эффективно перемножать многочлены.
- Произведение двух многочленов $A(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i$ и $B(x) = \sum_{i=0}^{d} b_i x^i$ степени d может быть вычислено за время $O(d^2)$: если

$$C(x) = A(x) \cdot B(x) = \sum_{i=0}^{2d} c_i x^i,$$

то

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Альтернативное представление многочленов

Факт

Многочлен степени d однозначно задается значениями в любых $d+1$ различных точках.

Задание многочлена значениями

- Выберем произвольные $(d+1)$ точку $x_0, \dots, x_d$.
- Многочлен $A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$ может быть задан одним из двух способов:
  1. коэффициентами $a_0, \dots, a_d$
  2. значениями $A(x_0), \dots, A(x_d)$
- Второе представление более удобно для вычисления произведения, однако обычно многочлены даны нам в виде списка коэффициентов и произведение необходимо вычислить в таком же виде.

Общая идея

Общая идея

- Выберем несколько точек $x_0, \dots, x_{n-1}$, где $n \geq 2d+1$, в каждой из них вычислим $C(x_i) = A(x_i)B(x_i)$ и по полученному набору точек восстановим многочлен C (данная операция называется интерполяцией).
- Ясно, что произведения мы вычислим за линейное время.
- Но сколько потребуется для вычисления всех значений $A(x_i), B(x_i)$?
- Потребуется $\Theta(d^2)$ операций.
- Мы покажем, что для некоторых специально выбранных точек x_i вычисление всех значений $A(x_i), B(x_i)$ можно провести за время $\Theta(d \log d)$, после чего по полученным значениям восстановить многочлен, опять же, за время $\Theta(d \log d)$.

План лекции

Быстрое вычисление значений в точках

Быстрое вычисление значений в точках

- Рассмотрим набор точек $\pm x_0, \pm x_1, \dots, \pm x_{n/2-1}$ и многочлен A степени не более $n-1$.
- Интуитивно ясно, что вычисление значений многочлена на таком наборе точек должно быть проще, поскольку $A(x_i)$ и $A(-x_i)$ содержат много одинаковых мономов.
- Разложим мономы A по чётности степени: $A(x) = A_0(x^2) + xA_1(x^2)$, где многочлены A_0 и A_1 имеют степень не более $n/2-1$.
- Нетрудно видеть, что

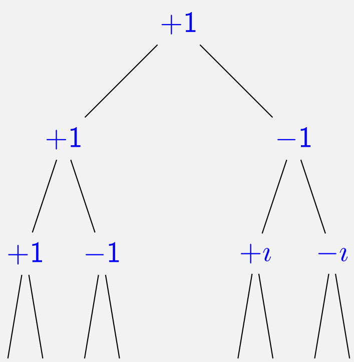
$$\begin{aligned} A(x_i) &= A_0(x_i^2) + x_iA_1(x_i^2) \\ A(-x_i) &= A_0(x_i^2) - x_iA_1(x_i^2) \end{aligned}$$

Быстрое вычисление значений в точках

Быстрое вычисление значений в точках

- Таким образом, мы свели задачу вычисления значений многочлена A степени не более $n-1$ в n точках $\pm x_0, \dots, \pm x_{n/2-1}$ к задаче вычисления значений двух многочленов A_0 и A_1 степени не более $n/2-1$ в $n/2$ точках $x_0^2, \dots, x_{n/2-1}^2$.
- Соответствующее рекуррентное соотношение: $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$.
- Но к полученному набору значений рекурсия не применима, поскольку он не является набором вида $\pm y_0, \dots, \pm y_k$!
- Идея: брать в качестве x_i комплексные числа.

Пример идеи



Итак, нас интересуют комплексные корни из единицы.

План лекции

Комплексные корни из единицы

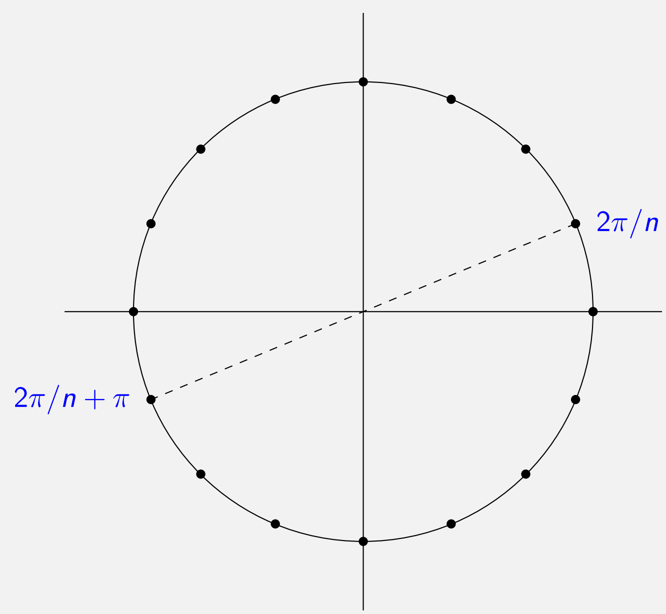
Определение

Комплексным корнем степени n из единицы называется такое комплексное число ω, что $\omega^n = 1$.

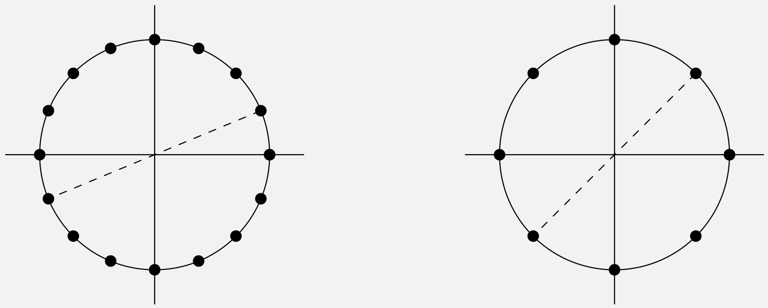
Факты

- Имеется ровно n комплексных корней из 1: $e^{2\pi\imath k/n}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
- Корни равномерно распределены на окружности единичного радиуса с центром в нуле.
- Все корни являются степенями главного значения корня степени n из единицы:
$$\omega_n = e^{2\pi\imath/n}.$$

Комплексные корни из единицы



Комплексные корни из единицы



Сводим задачу вычисления значений многочлена A в корнях n-й степени из единицы к задаче вычисления значений многочленов A_0 и A_1 в корнях $n/2$-й степени из единицы. Рассматриваемые точки при этом остаются разбитыми на пары.

План лекции

Дискретное преобразование Фурье

Определение

Дискретным преобразованием Фурье вектора $(a_0, \dots, a_{n-1})$ называется вектор $(y_0, \dots, y_{n-1})$, где

$$y_k = A(\omega_n^k) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i w_n^{ki}.$$

Быстрым преобразованием Фурье называется метод быстрого вычисления дискретного преобразования Фурье.

Быстрое преобразование Фурье

$\mathrm{FFT}(A, \omega_n)$

▷ Вход: коэффициенты многочлена A степени не более $n-1$, где n — степень двойки; корень из единицы n-й степени ω_n.
▷ Выход: значения $A(\omega_n^0), \dots, A(\omega_n^{n-1})$.
if $\omega = 1$
    then return $A(1)$
представить $A(x)$ в виде $A_0(x^2) + xA_1(x^2)$
$\mathrm{FFT}(A_0(\omega_n^2))$
$\mathrm{FFT}(A_1(\omega_n^2))$
for $j \leftarrow 0$ **to** $n-1$
        do $A(\omega_n^j) = A_0(\omega_n^{2j}) + \omega^j A_1(\omega_n^{2j})$
return $A(\omega_n^0), \dots, A(\omega_n^{n-1})$

План лекции

1. Быстрое вычисление значений в точках
2. Комплексные корни из единицы
3. Быстрое преобразование Фурье
4. Интерполяция

Интерполяция в терминах матриц

Интерполяция в терминах матриц

$$\begin{bmatrix} A(x_0) \\ A(x_1) \\ \vdots \\ A(x_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

- Матрица M в центре называется матрицей Вандермонда и обладает важным свойством: если $x_0, \dots, x_{n-1}$ попарно различны, то M обратима.
- Таким образом, вычисление значений есть домножение на M, в то время как интерполяция — домножение на M^{-1}.

Быстрое преобразование Фурье

$$\mathrm{FFT}(A, \omega_n) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega_n & {\omega_n}^2 & \dots & {\omega_n}^{n-1} \\ 1 & {\omega_n}^2 & {\omega_n}^4 & \dots & {\omega_n}^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & {\omega_n}^j & {\omega_n}^{2j} & \dots & {\omega_n}^{(n-1)j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & {\omega_n}^{n-1} & {\omega_n}^{2(n-1)} & \dots & {\omega_n}^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}}_{M_n} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Обратная матрица

Обратная матрица

- Итак, для восстановления коэффициентов многочлена по его значениям в точках $\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}$ необходимо построить матрицу M_n^{-1}.
- (k, j)-й элемент матрицы M_n равен ω_n^{jk}.
- Покажем, что (k, j)-й элемент матрицы M_n^{-1} равен ω_n^{-jk}/n.
- Необходимо показать, что для заданной таким образом матрицы M_n^{-1} выполнено равенство

$$M_n^{-1} M_n = I_n.$$

Доказательство

Доказательство

$$M_n^{-1}M_n[j,k]=\sum_{i=0}^{n-1}(\omega_n^{-ij}/n)(\omega_n^{ik})=\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{i(k-j)}/n$$

- если $j \neq k$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1}\omega_n^{i(k-j)}/n=\frac{1^{k-j}-1}{(w_n^{k-j}-1)n}=0$$

(знаменатель не равен нулю)

- если $j = k$, то $M_n^{-1}M_n[j,k]=1$ □

Резюме

Резюме

Таким образом, для восстановления многочлена по его значениям в точках $\omega_n^0,\dots,\omega_n^{n-1}$ достаточно применить быстрое преобразование Фурье к набору этих значений в точке w_n^{-1} и поделить полученные коэффициенты на n.

Общая схема: еще раз

Общая схема: еще раз

- Даны дав многочлена A и B степени d с коэффициентами $a_0,\dots,a_d$ и $b_0,\dots,b_d$. Треюуется найти коэффициенты многочлена $C=AB$.
- Пусть $n=2d+1$, ω_n — комплексный корень степени n из единицы.
- При помощи быстрого преобразования Фурье вычислить $A(\omega_n^0),\dots,A(\omega_n^{n-1})$ и $B(\omega_n^0),\dots,B(\omega_n^{n-1})$.
- Вычислить $C(\omega_n^0),\dots,C(\omega_n^{n-1})$ $(C(\omega_n^i)=A(\omega_n^i)B(\omega_n^i))$.
- Применив быстрое преобразование Фурье к набору значений $C(\omega_n^0),\dots,C(\omega_n^{n-1})$ и корню w_n^{-1} и поделив все полученные значения на n, получим коэффициенты многочлена C.