САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Математико-механический факультет

Кафедра высшей алгебры

A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа F_4

Дипломная работа

студента 511-ой группы

Николенко Сергея Игоревича

Научный руководитель, д. ф.-м. н., профессор кафедры высшей алгебры	 .... /Н. А. Вавилов/ /подпись/
Рецензент, чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., гл. н. с. ПОМИ РАН	 .... /И. А. Панин/ /подпись/
“Допустить к защите”, заведующий кафедрой, д. ф.-м. н., профессор	 .... /А. В. Яковлев/ /подпись/

Санкт-Петербург
2005

1. Введение

Настоящая дипломная работа посвящена дальнейшему развитию идей, нашедших первое воплощение в работе Н.А. Вавилова и М.Р. Гавриловича [VG02], а именно — новому способу доказательства структурных теорем для групп Шевалле над коммутативными кольцами, который может быть применён и для получения новых, более сильных результатов.

Структурные теоремы для групп Шевалле устанавливают стандартное описание подгрупп, нормализуемых элементарной группой. Точнее говоря, они устанавливают соответствие между такими подгруппами и идеалами базового кольца. В настоящей работе доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого коммутативного кольца R, такого, что $2R + R^2 = R$, в группе Шевалле $G(\mathrm{F}_4, R)$ имеет место стандартное описание подгрупп, нормализуемых элементарной группой $E(\mathrm{F}_4, R)$. А именно, для каждой такой подгруппы H существует такой единственный идеал $I \trianglelefteq R$, что*

$$E(\mathrm{F}_4, R, I) \leq H \leq C(\mathrm{F}_4, R, I),$$

где $E(\mathrm{F}_4, R, I)$ — элементарная подгруппа уровня I, а $C(\mathrm{F}_4, R, I)$ — полная конгруэнц-подгруппа уровня I.

Сама по себе эта теорема не является новым результатом. Этот результат для групп Шевалле над коммутативными кольцами был установлен в работах Абе, Судзуки и Васерштейна ([A88], [A89], [AS76], [Vas86]). Однако существовавшие до сих пор доказательства этих структурных теорем были технически сложными и плохо поддавались обобщению с целью описания подгрупп, нормализуемых не всей элементарной группой, а её частью, или, к примеру, подгрупп $\mathrm{GL}(n, R)$, нормализуемых элементарной подгруппой.

Наиболее подходящим для подобного рода обобщений был подход, развитый в работах Н.А Вавилова, Е.Б. Плоткина и А.В. Степанова ([VPS90], [SV00], [VP96]). Этот метод, названный *разложением унипотентов*, был основан на геометрии минимальных модулей групп Шевалле и, в конечном счёте, на редукции ранга. Было доказано, что редукцию можно осуществить при помощи двух типов вычислений: *элементарных*, т.е. тех, в которых используются лишь соотношения Стейнберга (см. [RSt75], [Ca72]), и *стабильных*, т.е. вычислений, затрагивающих только одну строку или столбец матрицы элемента группы Шевалле в подходящем представлении. Основным инструментом работы с группами Шевалле в этих доказательствах стали *весовые диаграммы*, они же в данном случае *кристаллические графы*.

Доказательства методом разложения унипотентов давали явные формулы, зависящие лишь от системы корней Φ, но не от основного кольца. Эти формулы базировались на вложениях в Φ подсистем корней. Однако если для классических групп то были небольшие подсистемы — A_2 в A_l, например, — то для исключительных групп подобные доказательства оказались гораздо сложнее технически. Это было связано с тем, что они требовали фиксации знаков структурных констант действия, что вносило существенные технические сложности, и опирались на вложение довольно больших подсистем (например, D_5 и A_5 в E_6), что не позволяло надеяться на доказательство интересных обобщений: к примеру, в 27-мерном и присоединённом представлениях E_6 максимум, на что можно было рассчитывать, — это описание подгрупп $G(\mathrm{E}_6, R)$, нормализуемых $E(A_5 + A_1, R)$ и $E(D_5, R)$.

В работе [VG02] был предложен новый метод доказательства структурных теорем для групп типа E_6 и E_7. Оно обладало целым рядом преимуществ перед имевшимися до тех пор доказательствами. Основными его достоинствами было то, что оно опиралось лишь на вложения $\mathrm{A}_2 \subseteq \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$, и то, что в нём не использовалось никакой информации о структурных константах действия, а также никакой информации о знаках или вообще о явной форме уравнений на орбиту вектора старшего веса. Это доказательство должно позволить описать подгруппы, нормализуемые элементарной подгруппой, отвечающей подсистеме Φ, доказать стандартное описание нормальных подгрупп в скрученных формах этих групп и описать подгруппы в $\mathrm{GL}(27, R)$, нормализуемые $E(\mathrm{E}_6, R)$.

Однако наиболее естественным продолжением работы [VG02] является применение данного в этой работе метода доказательства к другим группам Шевалле над коммутативными кольцами. В дипломной работе аналог доказательства [VG02] проводится для групп типа F_4. Непосредственное направление дальнейшей работы — доказательство структурной теоремы для скрученных групп Шевалле типа ${}^2\mathrm{E}_6$, которая уже является новым результатом. В дальнейшем развитие этих методов должно позволить доказать и более сильные результаты о строении решётки подгрупп $G(\Phi, R)$.

Доказательство в настоящей работе имеет ещё одну отличительную особенность. Дело в том, что рассуждения проводятся в 27-мерном (приводимом) представлении F_4. Оказывается, что в этом случае многие рассуждения упрощаются, а многие становятся абсолютно аналогичны рассуждениям для случая E_6.

2. Основные обозначения

2.1. **Группы Шевалле.** Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l (в основной части работы мы будем считать, что $\Phi = \mathrm{F}_4$), а P – решетка, лежащая между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^+ и Φ^- – множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку. Наша нумерация простых корней следует [Bou76]. Через δ обозначается максимальный корень системы Φ относительно этого порядка (в интересующем нас случае $\Phi = \mathrm{F}_4$ имеем $\delta = (\ 2342\ )$). Обозначим через $P(\Phi)_{++}$ – множество доминантных весов для этого порядка, напомним, что оно состоит из неотрицательных целочисленных линейных комбинаций фундаментальных весов $\bar\omega_1, \dots, \bar\omega_l$. Через $W = W(\Phi)$ обозначается группа Вейля системы корней Φ.

Пусть, далее, R – коммутативное кольцо с 1. Как хорошо известно, по этим данным можно построить *группу Шевалле* $G = G_P(\Phi, R)$, являющуюся группой точек над R некоторой аффинной групповой схемы $G = G_P(\Phi, -)$, называемой *схемой Шевалле-Демазюра.* Для рассматриваемых нами задач можно ограничиться односвязными (универсальными) группами, для которых $P = P(\Phi)$.

Затем следует выбрать базис Шевалле e_α, $\alpha \in \Phi$, h_i, $1 \leq i \leq l$, в комплексной простой алгебре Ли L типа Φ и построить алгебру Шевалле L_R, натянутую на e_α, h_i, над R. Для любых $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Phi$ выполняется равенство $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$, причем для базиса Шевалле все структурные константы $N_{\alpha\beta}$ целые. В дальнейшем мы фиксируем некоторый положительный базис Шевалле, для которого $N_{\alpha_i\beta} > 0$ каждый раз, когда $\alpha_i + \beta \in \Phi^+$ обладает тем свойством, что если $a_j + \gamma = \alpha_i + \beta$ для какого-то простого корня a_j и какого-то положительного корня γ, то $j > 0$.

Выбор базиса Шевалле задает, в частности, расщепимый максимальный тор $\mathrm{T}(\Phi, R)$ в группе Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$ и параметризацию корневых унипотентных подгрупп X_α, $\alpha \in \Phi$, относительно этого тора. Фиксируем эту параметризацию, пусть $x_\alpha(\xi)$ – элементарный корневой унипотент, отвечающий $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$. В дальнейшем мы будем пользоваться соотношениями Стейнберга (R1) – (R8) между элементами $x_\alpha(\xi)$, и, в особенности, коммутационной формулой Шевалле (см. [Bo73], [RSt75], [Ca72]) без всяких явных ссылок. Группа $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in R\}$ называется *элементарной корневой подгруппой*, а группа $\mathrm{E}(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi \rangle$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами, называется (абсолютной) *элементарной подгруппой* группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$.

2.2. **Модули Вейля.** Обычно мы рассматриваем группу Шевалле вместе с действием на *модуле Вейля* $V = V(\omega)$ для некоторого доминантного веса ω. Всюду ниже интересующая нас группа Шевалле типа F_4 рассматривается на контраградиентном 27-мерном модуле $V(\bar{\omega}_1)$. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается множество весов модуля $V = V(\omega)$ с учетом кратности.

В дальнейшем мы фиксируем *допустимый* базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Мы рассматриваем вектор $a \in V$, $a = \sum a_\lambda v^\lambda$, как *столбец* координат $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять себе как *строку* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Разумеется, по отношению к весам Λ^* контраградиентного модуля V^* картина обратная: элементы V^* представляются *столбцами* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$, а элементы V – *строками* $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$. Поэтому мы еще раз обращаем внимание на то, что мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля V – индексы λ, μ, ν и т.д. принадлежат Λ. Иными словами, нам удобно нумеровать координаты вектора из V^* весами модуля V и записывать их как строки (в то время как обычно они нумеруются весами самого модуля V^* и записываются как столбцы). Именно с этим обстоятельством связано то, что формулы, описывающие действие элементов группы G на строки, отличаются от соответствующих формул для столбцов.

Один из принципиальных технических моментов состоит в том, что элементы этих строк являются не линейно упорядоченными, а лишь частично упорядоченными, в соответствии с порядком на Λ, задаваемым выбором системы простых корней Π. А именно, мы полагаем, что $\lambda \geq \mu$, если $\lambda - \mu = \sum m_i \alpha_i$, где $m_i \geq 0$. При описанной выше интерпретации элементов модуля V элементы группы Шевалле естественно мыслить как матрицы $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ. Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов gv^μ, $\mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: μ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\mu}$, а λ-я строка – через $g_{\lambda *}$.

И, наконец, для дальнейшего следует зафиксировать нумерации. Нумерация корней в F_4 будет следовать рис. 1 (на рис. 2 изображена диаграмма весов F_4 с метками корней), а нумерация весов — рис. 3 (как сказано выше, мы мыслим множество весов лишь частично упорядоченным, однако для идентификации его элементов их полезно пронумеровать); мы будем обозначать через w_i i-ый вес в соответствии с этой нумерацией (в обозначении для матричных элементов g_{ij} мы будем опускать w).

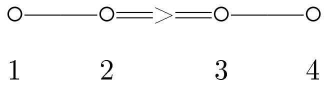

Рис. 1. Нумерация корней F_4

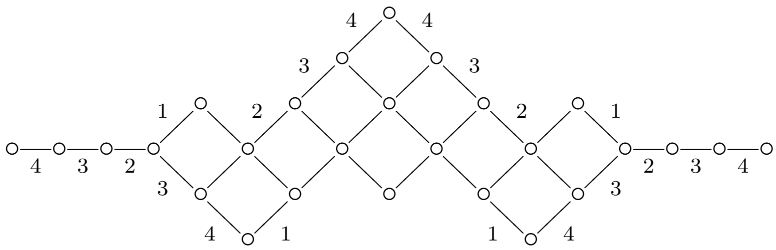

Рис. 2. Весовая диаграмма F_4 в 27-мерном представлении с метками корней

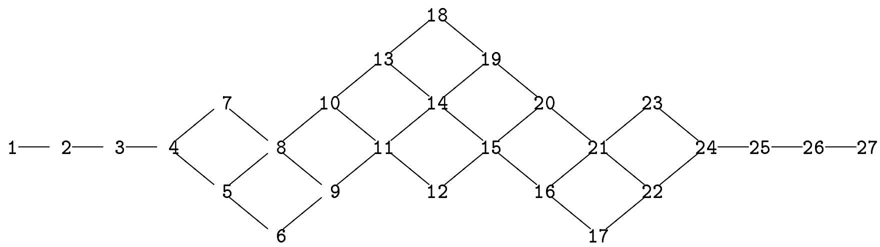

Рис. 3. Нумерация весов 27-мерного представления F_4

3. Редукция по уровню

В этом разделе мы докажем важнейший вспомогательный результат, необходимый для основной теоремы. Этот результат — *редукция по уровню* — стал после работ Басса ([Ba64], [Ba73]) основным инструментов для доказательства структурных теорем. Мы докажем соответствующий результат в случае F_4 и кольца, для которого $2R + R^2 = R$.

Лемма 1. *Для всякого корня $\alpha \in \mathrm{F}_4$ множество*

$$I = I_\alpha = \{\xi \in R \mid x_\alpha(\xi) \in H\}$$

образует идеал в R. Этот идеал не зависит от α. Более того, $E(\mathrm{F}_4, R, I) \le H$, причём I — наибольший идеал, обладающий таким свойством.

Доказательство. Доказательство основано на использовании соотношений Стейнберга. Замкнутость I относительно сложения очевидна:

$$x_\alpha(\xi+\eta) = x_\alpha(\xi)x_\alpha(\eta).$$

В системе F_4 любые два корня α и β можно соединить цепочкой корней, в которой любые два соседних корня неортоногональны, причём соседние корни разной длины образуют угол $\pi/4$. Рассмотрим теперь два неортогональных корня α и β. Если они одинаковой длины, то они содержатся в системе типа A_2 (образуют друг с другом угол $\pi/3$). Коммутационная формула Шевалле для этого случая принимает вид

$$x_\beta(\pm\zeta\xi) = [x_{\beta-\alpha}(\zeta), x_\alpha(\xi)] \in H$$

для любого $\zeta \in R$, и поэтому $RI_\alpha \subseteq I_\beta$ и, в силу симметрии, $RI_\beta \subseteq I_\alpha$. Отсюда следует, что $RI_\alpha = I_\alpha$, и поэтому I_α является идеалом и $I_\alpha = I_\beta$ для соседних корней одинаковой длины.

Пусть теперь α — длинный, β — короткий, и пусть они образуют угол $\pi/4$. Тогда, во-первых,

$$x_\beta(\pm 2\xi) = [x_\beta(\xi), x_{\alpha-\beta}(1)] \in H,$$

и поэтому $2I_\beta \subseteq I_\alpha$. Во-вторых,

$$x_{\alpha-\beta}(\pm\xi)x_\alpha(\pm\xi^2) = [x_\beta(\xi), x_{\alpha-2\beta}(1)] \in H,$$

и, так как $x_{\alpha-\beta}(\pm\xi) \in H$, то $I_\beta^2 \subseteq I_\alpha$. В-третьих,

$$x_\beta(\pm\xi)x_{2\beta-\alpha}(\pm\xi) = [x_\alpha(\xi), x_{2\beta-\alpha}(1)] \in H,$$

и поэтому (т.к. $x_\beta(\pm\xi)$) $I_\alpha \subseteq I_\beta$. Таким образом, $2I_\beta + I_\beta^2 \subseteq I_\alpha \subseteq I_\beta$, и, по условию на структуру кольца, $I_\alpha = I_\beta$. $\square$

Идеал I, построенный в лемме 1, называется *нижним уровнем* подгруппы H.

Предложение 1. *Предположим, что для любой пары (R, I), $I \trianglelefteq R$ выполняется следующее условие: если H — нецентральная подгруппа в $G(\mathrm{F}_4, R/I)$, нормализуемая $E(\mathrm{F}_4, R/I)$, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент $x_\alpha(\zeta)$, $\zeta \in R/I$, $\zeta \neq 0$. Тогда для любого кольца R в группе $G(\mathrm{F}_4, R)$ имеет место стандартное описание подгрупп, нормализуемых $E(\mathrm{F}_4, R)$.*

Доказательство. Пусть H – подгруппа в $G(\mathrm{F}_4, R)$, нормализуемая $E(\mathrm{F}_4, R)$ и I – нижний уровень подгруппы H. Рассмотрим образ $\bar{H} \leq G(\mathrm{F}_4, R/I)$ подгруппы H относительно редукции π_I по модулю I. Очевидно, что $\bar{H}$ нормализуется подгруппой $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R/I) = \pi_I(E(\mathrm{F}_4, R))$. По предположению, если $\bar{H}$ нецентральна, то она содержит элементарный корневой элемент $x_\alpha(\bar{\xi}) = x_\alpha(\xi+I)$, для некоторого $\xi \notin I$. Это значит, что H содержит элемент вида $h = x_\alpha(\xi)g$, для некоторого $g \in G(\mathrm{F}_4, R, I)$. Пусть β – корень под углом $2\pi/3$ к α. Тогда

$$[h, x_\beta(1)] = {}^{x_\alpha(\xi)}[g, x_\beta(1)][x_\alpha(\xi), x_\beta(1)] \in H.$$

В силу стандартной коммутационной формулы первый множитель принадлежит $E(\mathrm{F}_4, R, I) \leq H$, и, значит, второй множитель $x_{a+\beta}(\pm\xi)$ тоже принадлежит H. Но ведь $\xi \notin I$, что противоречит определению нижнего уровня. □

4. Централизатор корневого элемента

Замечание. В дальнейшем мы часто пишем $g_{\mu\nu}$, даже если μ или ν не является весом. В таком случае $g_{\mu\nu}$ означает ноль.

Здесь и далее мы следуем той же схеме доказательства, что и [VG02].

В этом разделе мы вычислим централизатор элементарного корневого элемента $x_\alpha(\xi)$. Прежде всего отметим два технических утверждения, доказательства которых получаются непосредственными вычислениями.

Лемма 2. *Для любых $g \in GL(n, R)$, $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in R$ имеют место формулы*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \pm \xi g_{\lambda-\alpha,\mu}, \qquad (gx_\alpha(\xi))_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \pm \xi g_{\lambda,\mu+\alpha}.$$

Знаки в вышеприведённых формулах можно уточнить, но для нашего доказательства это несущественно.

Лемма 3. *Если элемент $g \in GL(n, R)$ коммутирует с корневым элементом $x_\alpha(\xi)$ для какого-то корня $\alpha \in \Phi$, то*

(1) *$\xi g_{\lambda\mu} = 0$, если $\lambda + \alpha \in \Lambda$, но $\mu + \alpha \notin \Lambda$;*
(2) *$\xi g_{\lambda\mu} = 0$, если $\mu - \alpha \in \Lambda$, но $\lambda - \alpha \notin \Lambda$;*
(3) *$\xi(g_{\lambda\mu} - g_{\lambda+\alpha,\mu+\alpha}) = 0$, если $\lambda + \alpha, \mu + \alpha \in \Lambda$.*

Доказательство. Выпишем, пользуясь леммой 2, интересующие нас элементы матриц $x_\alpha(\xi)g$ и $gx_\alpha(\xi)$, а затем отметим, что $g_{\lambda\mu}$ взаимно уничтожаются, а в случаях (1) и (2) одно из других слагаемых равно нулю. □

Теперь мы готовы к доказательству первого результата этого параграфа:

Предложение 2. *Если $[g, x_\alpha(1)] = 1$ для какого-то элемента $g \in GL(n, R)$ и какого-то корня $\alpha \in \Phi_l$, то g лежит в параболической подгруппе P_1 типа C_3 (вида $(6, 15, 6)$).*

Доказательство. Если $\alpha \in \Phi_l$, то сопряжением можно перевести α в максимальный корень $\delta = (\ 2342\ )$. По лемме 3 получим $g_{\lambda\mu} = 0$, если $\lambda - \delta \notin \Lambda$ и $\mu - \delta \in \Lambda$ или если $\lambda + \delta \in \Lambda$ и $\mu + \delta \notin \Lambda$. Теперь достаточно взглянуть на весовую диаграмму, чтобы убедиться, что матрица g имеет требуемый вид. □

Предложение 3. (1) *Если коммутатор $[g, x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)]$ централен, где $\alpha, \beta \in \Phi_l$ и $\lambda-\alpha, \lambda-\beta \in \Lambda$, где λ — максимальный вес 27-мерного представления F_4, то он равен 1.*

(2) *Если коммутатор $[g, x_\alpha(\xi)]$, $\alpha \in \Phi$, централен, то он равен 1.*

Доказательство. (1) Как и в предыдущем доказательстве, на основании лемм 2 и 3 видим, что

$$(x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (gx_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta))_{\mu\nu}$$

для всех $\mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $\mu-\alpha, \mu-\beta \notin \Lambda$, $\nu+\alpha, \nu+\beta \notin \Lambda$. Таким образом, $g_{\mu\nu} = \epsilon g_{\mu\nu}$ для всех таких μ и ν, а всего имеется не более 9 весов μ и ν, не удовлетворяющих этому условию. Следовательно, такие $g_{\mu\nu}$ порождают единичный идеал в кольце R. А отсюда следует, что $\epsilon = 1$.

(2) Доказательство абсолютно аналогично:

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (gx_\alpha(\xi))_{\mu\nu}$$

для всех $\mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $\mu-\alpha \notin \Lambda$,$\nu+\alpha \notin \Lambda$, а весов, не удовлетворяющих этому условию, не более 11 даже в случае короткого корня.

Отметим, что условия предложения пришлось ослабить по сравнению с [VG02] для того, чтобы число “плохих” весов стало меньше $\frac{27}{2}$ — для произвольных корней α, β утверждение было бы неверным. Однако в дальнейшем (в лемме 5) предложение используется именно в сформулированном виде. ☐

Ещё одна техническая лемма:

Лемма 4. *Пусть $\Sigma \subseteq \Phi$ — множество корней такое, что $-\Sigma \cup \Sigma$ порождает Φ. Тогда у любой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$, коммутирующей со всеми корневыми элементами $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Sigma$, все диагональные элементы равны между собой.*

Доказательство. Из коммутирования и леммы 2 вытекает, что $g_{\lambda\lambda} = g_{\lambda-\alpha,\lambda-\alpha}$ для любого $\alpha \in \Sigma$. Осталось вспомнить, что разность любых двух весов является суммой корней. ☐

5. Извлечение из подгрупп P_1 и P_4

В этом параграфе мы докажем главный вспомогательный результат, на котором базируется основная лемма настоящей статьи, а именно то, что обычно называют “извлечением из параболической подгруппы”: если подгруппа $H \leq G$ содержит нецентральный элемент, лежащий в параболической подгруппе (в данной статье мы ограничимся доказательством для введённых выше подгрупп P_1 и P_4), то она содержит нетривиальный корневой элемент. Прежде всего запишем разложение Леви для подгруппы P_i: $P_i = L_iU_i$. Обозначим через Σ_i соответствующее множество корней. Тогда

Предложение 4. *Если элемент $z \in L_i$ коммутирует со всеми $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Sigma_i$, то он централен, $i \in \{1, 4\}$.*

Доказательство. Для этого достаточно показать, что матрица g диагональна, и тогда можно будет тут же применить лемму 4.

Сначала введём три множества, соответствующие параболической подгруппе P_1:

$$\Theta_1 = \{\lambda, \lambda-(\ 0001\ ), \lambda-(\ 0011\ ), \lambda-(\ 0111\ ), \lambda-(\ 0121\ ), \lambda-(\ 0122\ )\},$$

Θ_1^* — множество, симметричное Θ_1, и $\Xi_1 = \Lambda \setminus (\Theta_1 \cup \Theta_1^*)$. Нам нужно доказать, что, если $\lambda \neq \mu$ — два веса, лежащие одновременно в одном из этих множеств, то $g_{\lambda\mu} = 0$. Затем мы найдём такой корень $\alpha \in \Sigma_1$, что $\lambda + \alpha \in \Lambda$, но $\mu + \alpha \notin \Lambda$. Если $\lambda, \mu \in \Theta_1$, то без потери общности можно предположить, что $\lambda = w$, а для μ остаются два варианта: либо $w-(\ 0001\ )$, либо $w-(\ 0122\ )$. В обоих случаях подходит $\alpha = (\ 1122\ )$. Случай $\lambda, \mu \in \Theta_1^*$ рассматривается аналогично.

В случае же $\lambda, \mu \in \Xi_1$ приходится рассматривать пять случаев: $\lambda = w - (\ 1111\ )$, а μ может оказаться в одной из пяти орбит пары (λ, μ) (но внутри этих орбит мы вольны выбирать любой элемент). В случаях $\mu \in \{w_8, w_{13}, w_{15}, w_{23}\}$ корень $(\ 1231\ )$ обладает требуемым свойством, а в случае $\mu = w_{12}$ можно положить $\alpha = (\ 1242\ )$.

Теперь обратимся к случаю P_4. В этом случае рассмотрим три множества: $\Theta_4 = \{w_2, w_3, w_4, w_5, w_7, w_8, w_{10}, w_{13}\}$, Θ_4^* — множество, симметричное Θ_4, и $\Xi_4 = \{w_6, w_9, w_{11}, w_{12}, w_{14}, w_{15}, w_{16}, w_{17}\}$. В случаях Θ_4 и Θ_4^* группа Вейля типа B_3 может перевести первый корень пары в максимальный вес, а для второго корня остаются две возможности. Для Θ_4 в обоих случаях ((w_2, w_3) и (w_2, w_7)) подходит $\alpha = (\ 1121\ )$, Θ_4^* рассматривается аналогично, а в случае Ξ_4 паре $(w_6 - \beta, w_j)$ подходит корень $\alpha = (\ 2342\ ) - \beta$. □

Теперь перейдём непосредственно к извлечению из подгрупп P_i.

Предложение 5. *Если H содержит нецентральный элемент, лежащий в собственной параболической подгруппе P_i, $i \in \{1, 4\}$, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. Будем считать, что $g = zv$, где $z \in L_i$, $v \in U_i$, причём $z \neq \epsilon e$. Фиксируем $\alpha \in \Sigma_i$ и рассмотрим коммутатор

$$u = [g, x_\alpha(1)] = [zv, x_\alpha(1)] = {}^z[v, x_\alpha(1)][z, x_\alpha(1)].$$

В случае P_1 наша цель — попасть в коммутант унипотентного радикала $[U_1, U_1]$, т.е. в корневую подгруппу корня $\delta = (\ 2342\ )$. Отметим, что первый сомножитель — ${}^z[v, x_\alpha(1)]$ — уже лежит в $[U_1, U_1]$, а вот второй принадлежит пока только U_1 и может иметь ненулевые коэффициенты при не равных δ корнях в разложении $u =$

$\prod_{\alpha\in\Sigma_1} x_\alpha(u_\alpha)$. Если $u_\alpha \neq 0$ для какого-либо $\alpha \in U_1 \setminus \{\delta, (\ 1121\ )\}$, то, выбирая минимальный такой α, получаем

$$[u, x_{\delta-\alpha}(1)] = x_\delta(\pm u_\alpha) \in H, \text{ —}$$

требуемый корневой элемент. Остаётся только случай, когда минимальный α с ненулевым коэффициентом — это (1121). Но тогда можно предварительно прокоммутировать, например, $[u, x_{(\ 0001\ )}(1)]$, заменив тем самым (1121) на (1122) и сведя к предыдущему случаю.

В случае P_4 мы также стремимся попасть в $\delta = (\ 2342\ )$. На первом шаге мы попадаем в $[U_4, U_4]$ так же, как в предыдущем случае, а затем, выбирая минимальный из элементов с ненулевыми коэффициентами в разложении $\alpha \in [U_4, U_4]$, коммутируем $[u, x_{\delta-\alpha}(1)]$. □

Выведем из данного предложения два следствия.

Следствие 1. *Если $x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)$, $\alpha, \beta \in \Phi_l$, стабилизирует какой-то столбец матрицы $g \in H$, но не коммутирует с g, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. Это значит, что $z = [g, x] \in H$ лежит в параболической подгруппе P_4. Так как x не коммутирует с g, z по предложению 3 нецентрален, и по предложению 5 H содержит нетривиальный корневой элемент. □

Следствие 2. *Если для нецентрального элемента $g \in H$ его коммутатор $[g, x_\alpha(1)]$ с корневым элементом $x_\alpha(1)$ для какого-то корня $\alpha \in \Phi$ централен, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент.*

Доказательство. Достаточно применить предложение 3, затем предложение 2, а затем предложение 5. □

6. Основная лемма

Лемма 5. *Предположим, что для какого-то нецентрального элемента $g \in H$ выполняется равенство $g'_{\sigma\lambda} = 0$ для всех $\sigma \in \Lambda, d(\lambda, \sigma) = 2$, где λ — максимальный вес 27-мерного представления группы F_4. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. В доказательстве мы постоянно используем следующие формулы (см. лемму 2), на которых и основаны практически все рассуждения настоящей статьи:

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} \pm \xi g_{\nu-\alpha,\mu}, \qquad (gx_\alpha(\xi))_{\nu\mu} = g_{\nu\mu} \pm \xi g_{\nu,\mu+\alpha} \quad (1)$$

Рассмотрим любые два различных веса $\mu, \nu \in \Lambda$, таких, что $\lambda - \mu \in \Phi_l, \lambda - \nu \in \Phi_l$, где Φ_l — множество всех длинных корней Φ.

Рассмотрим корневой элемент $x(\mu,\nu) = x_\alpha(g'_{\nu\lambda})x_\beta(g'_{\mu\lambda})$, где $\alpha = \lambda-\mu$, $\beta=\lambda-\nu$. Тогда

$$(g^{-1}x)_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\nu\lambda}g'_{\rho,\sigma+\alpha} \pm g'_{\mu\lambda}(g'_{\rho,\sigma+\beta} \pm g'_{\nu\lambda}g'_{\rho,\sigma+\beta+\alpha}) \tag{2}$$

$$(xg^{-1})_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\alpha,\sigma} \pm g'_{\nu\lambda}(g'_{\rho-\beta,\sigma} \pm g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\beta-\alpha,\sigma}). \tag{3}$$

Отметим, что, если $\lambda-\rho\in\Phi$, $\alpha\in\Phi_l$, и $\rho-\alpha\in\Lambda$, то $d(\lambda,\rho-\alpha)=2$ (это легко проверить, используя весовую диаграмму). Из этого свойства и (2) следует, что $(g^{-1}x)_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$ и, таким образом, $[g,x]_{*\lambda} = v^\lambda$.

Теперь из следствия 2 следует, что либо z нецентрален, и, таким образом, H содержит нетривиальный корневой элемент, либо все такие z центральны и, по предложению 3, равны e. В последнем случае g^{-1} коммутирует со всеми $x(\mu\nu)$, и, если теперь в (2) и (3) заменить σ на μ, то мы увидим, что $g'_{\rho\lambda}g'_{\mu\lambda}=0$ для всех тех $\rho,\mu\in\Lambda$, для которых существует такой вес $\nu\in\Lambda$, что

$$\lambda-\mu\in\Phi_l,\ \lambda-\nu\in\Phi_l,\ \mu+\beta\notin\Phi_l,\ \rho-\alpha\notin\Lambda,\ \rho-\alpha\notin\Lambda, \tag{4}$$

где $\alpha=\lambda-\mu$, $\beta=\lambda-\nu$.

Прямые вычисления показывают, что вышеприведённое условие эквивалентно следующим равенствам:

$$g'_{6\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 17, \tag{5}$$

$$g'_{9\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 3,\ 5,\ 10,\ 13,\ 16, \tag{6}$$

$$g'_{11\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 15, \tag{7}$$

$$g'_{15\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 2,\ 4,\ 7,\ 10,\ 11, \tag{8}$$

$$g'_{16\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9, \tag{9}$$

$$g'_{17\lambda}g'_{\rho\lambda}=0,\ \rho\neq 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \tag{10}$$

где веса пронумерованы согласно рис. 3.

Чтобы рассмотреть остальные случаи, нужно найти такие корневые элементы $x_\gamma(\xi)$, что $(x_\gamma(\xi)g^{-1})_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$, для того чтобы применить следствие 1 и доказать, что g коммутирует с $x_\gamma(\xi)$. Положив $\xi=g'_{\mu\lambda}$ для такого μ, что $\lambda-\mu\in\Phi_l$, видим, что условие стабилизации первого столбца, по (1), эквивалентно условию

$$g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\lambda}=0 \qquad \forall\rho\in\Lambda.$$

Итак, мы ищем такие γ, что для каждого ρ

$$\rho-\gamma\notin\Lambda,\ d(\rho-\gamma,\lambda)=2,\ \text{либо уже доказано, что } g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\lambda}=0. \tag{11}$$

Если мы найдём такие γ, то либо H уже содержит нетривиальный корневой элемент, либо g коммутирует с $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$. В последнем случае

$$g'_{\tau\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\tau-\gamma,\sigma} = (x_\gamma(g'_{\mu\lambda}) g^{-1})_{\tau\sigma} = \\ = (g^{-1} x_\gamma(g'_{\mu\lambda}))_{\tau\sigma} = g'_{\tau\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\tau,\sigma+\gamma}. \quad (12)$$

Следовательно, $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0$ для всех таких $\mu, \rho \in \Lambda$, что существует такое $\gamma \in \Phi$, что $\rho - \gamma \notin \Lambda$, $\lambda - \gamma \in \Lambda$, и для всякого ρ γ удовлетворяет одному из условий (11). Сейчас мы укажем корни, которые нужно рассмотреть для доказательства случаев, не рассмотренных в (5)-(10). Отметим, что порядок вычислений имеет значение: иногда мы используем доказанные результаты для исполнения условий последующих случаев. Именно поэтому некоторые корни появляются в доказательстве более одного раза.

$$\gamma = (\ 0001\ ) \Longrightarrow g'_{6\lambda} g'_{7\lambda} = 0,\ g'_{9\lambda} g'_{3\lambda} = 0, g'_{15\lambda} g'_{7\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 0011\ ) \Longrightarrow g'_{6\lambda} g'_{8\lambda} = 0,\ g'_{9\lambda} g'_{5\lambda} = 0,\ g'_{15\lambda} g'_{2\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 0111\ ) \Longrightarrow g'_{11\lambda} g'_{2\lambda} = 0,\ g'_{11\lambda} g'_{5\lambda} = 0,\ g'_{16\lambda} g'_{2\lambda} = 0,\ g'_{6\lambda} g'_{10\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 0001\ ) \Longrightarrow g'_{11\lambda} g'_{3\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1111\ ) \Longrightarrow g'_{9\lambda} g'_{10\lambda} = 0,\ g'_{11\lambda} g'_{8\lambda} = 0,\ g'_{17\lambda} g'_{4\lambda} = 0,\ g'_{17\lambda} g'_{2\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1120\ ) \Longrightarrow g'_{6\lambda} g'_{13\lambda} = 0,\ g'_{16\lambda} g'_{3\lambda} = 0,\ g'_{15\lambda} g'_{4\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1222\ ) \Longrightarrow g'_{9\lambda} g'_{16\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1121\ ) \Longrightarrow g'_{9\lambda} g'_{13\lambda} = 0,\ g'_{17\lambda} g'_{3\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1220\ ) \Longrightarrow g'_{16\lambda} g'_{9\lambda} = 0,\ g'_{15\lambda} g'_{11\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 0001\ ) \Longrightarrow g'_{15\lambda} g'_{7\lambda} = 0.\ \ \gamma = (\ 1111\ ) \Longrightarrow g'_{15\lambda} g'_{10\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 1221\ ) \Longrightarrow g'_{6\lambda} g'_{17\lambda} = 0,\ g'_{16\lambda} g'_{7\lambda} = 0,\ g'_{16\lambda} g'_{8\lambda} = 0.$$
$$\gamma = (\ 0011\ ) \Longrightarrow g'_{17\lambda} g'_{5\lambda} = 0.\ \ \gamma = (\ 1120\ ) \Longrightarrow g'_{11\lambda} g'_{13\lambda} = 0.$$

Таким образом, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0$ для всякого $\rho, \mu \in \Lambda, \lambda - \mu \in \Phi_l$. Чтобы рассмотреть остальные случаи, достаточно заметить, что мы могли заменить ξ в выражении $(x_\gamma(\xi) g^{-1})_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$ на $g'_{\mu\lambda}$ для любого μ, и первый столбец будет стабилизирован, если $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\gamma,\lambda} = 0$ для всякого $\rho \in \Lambda$. Затем, по (12) (заменив σ на $\lambda - \gamma$), получим $g'_{\mu\lambda} g'_{\sigma\lambda} = 0$ для всех μ, σ таких, что существует такое γ, что первый столбец стабилизирован, $\tau - \gamma \notin \Lambda$, и $\lambda - \gamma \in \Lambda$. Теперь легко найти такое γ для каждой пары весов, потому что мы можем просто выбрать такое $\gamma \in \Phi_l$, что $\tau - \gamma \notin \Lambda$ — первый столбец автоматически будет стабилизирован по уже доказанному выше (нужно лишь позаботиться о том, чтобы $\rho - \gamma$ не оказалось равным весу 12 или 14, но этого также легко избежать).

Итак, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda} g'_{\nu\lambda} = 0$ для всех $\mu, \nu \in \Lambda$. Иными словами, если A — идеал в R, порождённый элементами $g'_{\mu\lambda}$, $\mu \neq \lambda$, то $A^2 = 0$. Кроме того, редукция по модулю A показывает, что и $g_{\mu\lambda} \in A$ для всех $\mu \neq \lambda$.

Осталось рассмотреть коммутатор $z = [g, x_\alpha(1)]$, $\alpha \in \Phi_l$. Столбец $v = x_\alpha(1) g_{*\lambda}^{-1}$ отличается от $g_{*\lambda}^{-1}$ только тем, что $v_\lambda = g'_{\lambda\lambda} + g'_{\mu\lambda}$, а остальные элементы совпадают. Это значит, что $gxg_{*\lambda}^{-1}$ пропорционален базисному столбцу v^λ, и z лежит в параболической подгруппе типа P_1. Значит, H содержит нетривиальный корневой элемент либо по следствию 1 (если z нецентрален), либо по следствию 2. □

7. Доказательство из Книги

В силу предложения 1 нам достаточно показать, что любая нецентральная подгруппа H в $G = G(\Phi, R)$, $\Phi = F_4$, нормализуемая элементарной подгруппой $E(\Phi, R)$, содержит нетривиальный элементарный корневой элемент. Рассмотрим нецентральный $g \in H$. Возьмём любой $\alpha \in \Phi$. Если хотя бы для одного корня $\alpha \in \Phi$ коммутатор $[g, x_\alpha(1)]$ централен, то по следствию 2 подгруппа H содержит нетривиальный корневой элемент. Поэтому можно с самого начала считать, что $g \in H$ — произведение корневого элемента на элементарный корневой элемент.

Элемент g не более чем в 11 столбцах отличается от корневого элемента. Но это значит, что по крайней мере 16 столбцов удовлетворяют условиям основной леммы. Поэтому H содержит нетривиальный корневой элемент.

8. Заключение и открытые проблемы

В настоящей работе доказывается структурная теорема для групп Шевалле типа F_4 над коммутативными кольцами (удовлетворяющими условию $2R + R^2 = R$). Однако методы, применённые в настоящей работе, позволят доказать и более интересные результаты. В частности, в ближайших планах — доказательство аналогичной структурной теоремы для скрученных форм групп Шевалле, в частности, для групп типа ${}^2\mathrm{E}_6$. Эта теорема станет новым результатом.

Кроме того, развитые здесь методы допускают и другие применения. Например, они могут позволить описать подгруппы $G(\Phi, R)$, нормализуемые $E(\Delta, R)$, где $\Delta \subseteq \Phi$, или описать подгруппы $\mathrm{GL}(27, R)$, нормализуемые $E(\mathrm{E}_6, R)$ или $E(\mathrm{F}_4, R)$. Возможны и другие применения в описании структурые решётки подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами.

Список литературы

[Ba73] Х. Басс. Алгебраическая K-теория. М., Мир, 1973.

[Bo73] А. Борель. Свойства и линейные представления групп Шевалле. Семинар по алгебраическим группам. М., 1973, стр. 9–59.

[Bou76] Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли. Главы I – III. М., 1976

[VG02] Н.А. Вавилов, М.Р. Гаврилович. A_2-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов E_6 и E_7.

[VPS90] Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов. Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами. Докл. АН СССР **40**, выпуск 1, 1990, стр. 145–147.

[RSt75] Р. Стейнберг. Лекции о группах Шевалле М., 1975.

[A69] E. Abe, *Chevalley groups over local rings*, Tôhoku Math. J. **21** (1969), no. 3, pp. 474–494.

[A88] E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings*, Proc. Conf. Radical Theory, Sendai – 1988, pp. 1–23.

[A89] E. Abe *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Contemp. Math. **83**, 1989, pp. 1–17.

[AS76] E. Abe, K. Suzuki *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J., **28**, issue 1, 1976, pp. 185–198.

[Ba64] H. Bass. K-theory and stable algebra. Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci. **22**, 1964, pp. 5–60.

[Ca72] R. Carter. Simple groups of Lie type. Wiley, London et al., 1972.

[Mat69] H. Matsumoto. Sur les sous-groupes arithmetiques des groupes semi-simples déployés. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér, **2**, 1969, pp. 1–62.

[MSt71] M. R. Stein. Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings. Amer. J. Math., **93**, issue 4, 1971, pp. 965–1004.

[MSt78] M. R. Stein. Stability theorems for K_1, K_2 and related functors modeled on Chevalley groupes. Japan J. Math., **4**, issue 1, 1978, pp. 77–108.

[SV00] A. V. Stepanov, N. A. Vavilov. Decomposition of transvections: a Theme with variations. K-theory, **19**, 2000, pp. 109–153.

[Vas86] L. N. Vaserstein. *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J. **36**, issue 5, 1986, pp. 219–230.

[Vav91] N. A. Vavilov. Structure of Chevalley groups over commutative rings. Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990). World Sci. Publ., London et al., 1991, pp. 219–335.

[VP96] N. A. Vavilov, E. B. Plotkin. Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations. Acta Applicandae Math., **45**, 1996, pp.73–115.