Алгебра и анализ
Том 20 (2008), №4

A_2-ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СТРУКТУРНЫХ ТЕОРЕМ ДЛЯ ГРУППЫ ШЕВАЛЛЕ ТИПА F_4

© Н. А. ВАВИЛОВ, С. И. НИКОЛЕНКО

Мы даём новое геометрическое доказательство стандартного описания подгрупп групп Шевалле $G = \mathrm{G}(\mathrm{F}_4, R)$ типа F_4 над коммутативным кольцом R, нормализуемых элементарной подгруппой $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$. Имеется два основных типа доказательств подобных результатов. Локализационные доказательства (Квиллен, Суслин, Бак) основаны на редукции размерности. Первое доказательство структурных теорем для исключительных групп на этом пути было получено в работах Абе, Судзуки, Таддеи и Васерштейна, однако оно опиралось на нетривиальные результаты такие, как теорема простоты Шевалле и редукция по радикалу. В дальнейшем первый автор, Степанов и Плоткин развили геометрический подход, разложение унипотентов, основанный на редукции по рангу. Этот подход совмещает методы Суслина, Уилсона и Голубчика, относившиеся к классическим группам, и методы теории представлений и алгебраической K-теории, введенные в структурную теорию групп Шевалле Мацумото и Штейном. Для векторных представлений классических групп доказательства, получающиеся на этом пути, совсем элементарны. С другой стороны, их обобщения на исключительные группы потребовали явного знания знаков структурных констант действия и уравнений на орбиту вектора старшего веса. Кроме того, они зависят от существования классических подгрупп очень большого ранга. В работе первого автора и Гавриловича для групп Шевалле типов $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ было предложено еще одно геометрическое доказательство структурных теорем (the proof from the Book), совмещающее идеи разложения унипотентов и кратного коммутирования. В настоящей работе мы показываем, что ценой дополнительных усилий можно так модифицировать это доказательство, чтобы охватить случай $\Phi = \mathrm{F}_4$. Попутно мы устанавливаем несколько новых фактов о группе Шевалле типа F_4 и ее 27-мерном представлении.

Ключевые слова: группа Шевалле, элементарная подгруппа, нормальные подгруппы, стандартное описание, минимальный модуль, параболические подгруппы, разложение унипотентов, корневой элемент, орбита вектора старшего веса, доказательство из Книги.

Настоящая работа выполнена в рамках проектов РФФИ 03–01–00349 (ПОМИ РАН) и INTAS 03–51–3251. Частично работа выполнялась в университете Билефельда при поддержке SFB-343 и INTAS 00–566.

В настоящей работе, продолжающей работу первого автора и Михаила Гавриловича [12], мы доказываем основные структурные теоремы для группы Шевалле $G = G(\mathrm{F}_4, R)$ типа F_4 над коммутативным кольцом R, а точнее, описываем подгруппы в $G(\mathrm{F}_4, R)$, нормализуемые элементарной подгруппой $E(\mathrm{F}_4, R)$. Сам по себе этот результат не является новым, так как структурные теоремы известны для всех групп Шевалле, для классических групп они установлены в [38, 45, 82, 18–20, 3, 55, 56, 70, 72–74, 48, 49, 27, 66, 43], а для исключительных — в [30–32, 34, 67, 69, 71, 50], см. также дальнейшие ссылки в [12, 13, 42, 43, 66, 75, 80]. Таким образом, основной пафос настоящей статьи, как и статьи [12], заключается не в самих доказываемых результатах, а, скорее, в способе их доказательства. А именно, мы предлагаем новый геометрический подход к вычислениям в группе Шевалле типа F_4, который использует минимум информации о группе.

§1. Введение

Как доказываются результаты о группе Шевалле $G(\Phi, R)$? В определение этой группы входят два параметра, система корней Φ и коммутативное кольцо R. Все известные сегодня доказательства основаны на индукции по рангу системы Φ, по размерности кольца R или на комбинации того и другого. Доказательства в терминах размерности кольца называются *локализационными*, им посвящена *огромная* литература (см. ссылки в [39–43, 52–54, 66]).

С другой стороны, доказательства, основанные на редукции к группам меньшего ранга, обычно не используют ничего, кроме геометрии подлежащего модуля, и поэтому называются *геометрическими*. Сделаем несколько замечаний по поводу эволюции таких доказательств.

• Классическая группа сохраняет инвариант степени 2 и, таким образом, задается уравнениями степени 2. Над полями геометрия соответствующих модулей изучается несколько тысячелетий — и уже совершенно официально под таким названием больше века, по крайней мере, начиная с книг Камиля Жордана и Леонарда Диксона, — составляет предмет ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ [2] или ГЕОМЕТРИИ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП [21]. Совершенно выдающуюся роль в формирование этого направления внесли работы Жана Дьедонне 1940–1950-х гг. В действительности большинство результатов о классических группах над кольцами были впервые доказаны, начиная с 1960-х гг., именно такими методами, и в замечательной книге Хана и О'Миры [51] можно найти систематическое изложение этой теории.

• Исключительные группы невозможно описать в терминах инвариантов степени 2. В действительности в минимальных представлениях они сохраняют инвариант степени 3 или 4, см., например, [35, 36, 47, 61, 75, 77], где можно найти ссылки на классические работы. В [14, 15] явно написаны уравнения, определяющие принадлежность матрицы группе $G(\mathrm{E}_6, R)$ в 27-мерном представлении, и приведено много дальнейших ссылок. Для полей ГЕОМЕТРИЯ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУПП была предсказана Диксоном и всерьёз изучалась, начиная с 1950-х гг., в первую очередь, голландской и бельгийской школами, в том числе такими замечательными математиками, как Ганс Фройденталь, Жак Титс, Тонни Спрингер, Фердинанд Фельдкамп и другими. В последние два десятилетия это направление получило новую жизнь в связи с изучением подгрупп исключительных групп в работах Майкла Ашбахера, Арье Коэна, Брюса Куперстейна и многих других. В то же время для колец достижения здесь значительно скромнее (см. [75, 77, 14]). Во всяком случае, до самого последнего времени доказывать таким способом структурные теоремы для *произвольных* коммутативных колец никому не удавалось.

• Заметным концептуальным продвижением в изучении исключительных групп над кольцами были работы Алексея Степанова, первого автора и Евгения Плоткина [17, 75, 80, 66], в которых было замечено, что с использованием теории представлений вычисления, необходимые для доказательства структурных теорем, сводятся к элементарным и стабильным вычислениям. Технология стабильных вычислений была развита в основополагающих работах Хидейа Мацумото [57] и Майкла Стайна [63] в связи с приложениями в K-теории. Конкретный метод сведения вычислений, нужных для доказательства структурных теорем, к элементарным и стабильным, был назван в [17] РАЗЛОЖЕНИЕМ УНИПОТЕНТОВ. Радикальное упрощение достигается при этом подходе за счёт того, что вместо уравнений степени 3 или 4 в нем используются только *квадратичные* уравнения на элементы одного столбца или одной строки матрицы — и даже только часть этих уравнений [9, 11]!

Для классических групп (по крайней мере в векторных представлениях) аналогичная программа была немедленно реализована в [26, 7], детальные доказательства опубликованы в [75, 66, 42, 43], притом в гораздо большей общности — рассматриваемые там кольца не обязательно коммутативны, группы — не обязательно расщепимы и т.д. В то же время для исключительных групп многие технические моменты оказались *гораздо* сложнее, чем это нам представлялось в момент написания [17]. Оказалось, что в отличие от классических случаев доказательства для исключительных групп апеллируют к существованию грандиозных классических вложений, таких как $\mathrm{A}_5 \le \mathrm{E}_6$ и $\mathrm{A}_7 \le \mathrm{E}_7$. Кроме того, в доказательстве нам пришлось самым существенным образом использовать явные вычисления структурных констант действия и уравнений на орбиту старшего веса.

Единственные исключительные случаи, для которых опубликованы доказательства методом разложения унипотентов, не зависящие от компьютерных вычислений, — это (E_6, ϖ_1), (E_7, ϖ_7) и (E_6, ϖ_2) (см. [77, 11]). Доказательства для присоединенных представлений и в случае корней разной длины оказались значительно сложнее технически. Скажем, в работе первого автора и Евгения Плоткина 1989 г. для стабилизации столбцов матрицы $g \in G(\mathrm{F}_4, R)$ в 26-мерном представлении использовались элементы корневого типа

$$
\begin{aligned}
&x_{\beta_1}(\pm g^2_{\lambda_1\mu}) x_{\beta_2}(\pm g^2_{\lambda_2\mu}) x_{\beta_3}(\pm g^2_{\lambda_3\mu}) \\
&\quad \cdot x_{\beta_4}(\pm g_{\lambda_1\mu} g_{\lambda_2\mu}) x_{\beta_5}(\pm g_{\lambda_1\mu} g_{\lambda_3\mu}) x_{\beta_6}(\pm g_{\lambda_2\mu} g_{\lambda_3\mu}) \\
&\quad \cdot x_{\beta_7}(\pm g_{\lambda_1\mu} g_{\nu_1\mu} \pm g_{\lambda_2\mu} g_{\nu_2\mu} \pm g_{\lambda_3\mu} g_{\nu_2\mu}) \\
&\quad \cdot x_{\beta_8}(\pm g_{\lambda_1\mu} g_{\rho_1\mu} \pm g_{\lambda_2\mu} g_{\rho_2\mu} \pm g_{\lambda_3\mu} g_{\rho_3\mu})
\end{aligned}
$$

для многих десятков различных конфигураций корней β_i и весов $\lambda_i, \mu, \nu_i, \rho_i$. $\blacksquare$ Достаточно взглянуть на это выражение, чтобы понять, почему детали вычислений до сих пор остаются неопубликованными.

• В статье первого автора и Михаила Гавриловича [12] было предложено дальнейшее усовершенствование этого метода для групп типов E_6 и E_7. За счет совсем простых теоретико-групповых соображений в этом доказательстве нам удалось не только заменить ссылку на существование громадных классических вложений ссылкой на вложения $\mathrm{A}_2 \le \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$, не только полностью избежать ссылок на явное знание структурных констант и квадратичных уравнений на столбец, но и вообще не использовать никаких нетривиальных уравнений. Единственные уравнения, которые используются в этом доказательстве, доказательстве из Книги, — это линейные уравнения, определяющие алгебру Ли группы G.

Основным содержанием работы [12] является новый метод редукции структурных вопросов к группам меньшего ранга. Близкий метод около трех десятилетий использовался при изучении классических групп, но по загадочным причинам до работы [12] никто не заметил, что его можно применить и к исключительным группам! В действительности для применимости этого метода рассматриваемая редуктивная группа не должна быть даже группой Шевалле, достаточно, чтобы она содержала *расщепимую* подгруппу типа A_2 и имела микровесовое представление. Микровесовые представления замечательны тем, что в них все корневые унипотентные элементы $x_\alpha(\xi)$ действуют квадратично, или, что то же самое, $e_\alpha^2 = 0$.

В настоящей работе мы делаем следующий шаг и показываем, что ценой некоторых дополнительных усилий можно усовершенствовать этот метод и требовать лишь, чтобы *длинные* корневые элементы $x_\alpha(\xi)$ действовали квадратично — разумеется, по-прежнему при наличии *расщепимой* подгруппы типа A_2, вложенной на *длинные* корни. Этот метод одновременно проще и сильнее всех известных сегодня редукционных методов. Мы иллюстрируем возникающие вычисления на примере доказательства структурных теорем для группы типа F_4, но в действительности применимость подобных соображений значительно шире. В частности, пользуясь этим методом, можно перенести на случай F_4 все результаты о подгруппах классических групп, содержащих большую регулярно вложенную подгруппу (см. ссылки в [76, 12]).

Мы уверены, что трактовка в том же духе группы Шевалле типа E_8 тоже возможна, и собираемся вернуться к этому в следующей работе. Однако в этом случае жизнь становится труднее: группа типа E_8 сама не имеет микровесовых представлений и не является скручиванием группы, имеющей такие представления. А в присоединенном представлении верно лишь, что $e_\alpha^3 = 0$. Получение подобного доказательства в случае E_8 представляло бы большой интерес, в частности, и потому, что оно было бы важным шагом в направлении получения аналогичных структурных результатов на уровне K_2, скажем, доказательства центральности K_2. Первые шаги в этом направлении для групп типов E_6 и E_7 сделаны в работе первого автора [79].

Мы не можем и не будем даже пытаться напомнить здесь определения всех используемых в настоящей работе понятий, относящихся к системам корней, группам Вейля, весам и представлениям, алгебраическим группам, группам Шевалле и алгебраической K-теории. В качестве общего background'а, владение которым в основном достаточно для понимания настоящей работы, укажем книги [4–6, 24, 25, 28, 29, 46, 51, 60, 61, 81].

Все нужные нам специфические факты, относящиеся собственно к теории групп Шевалле над кольцами, а также большое количество дальнейших ссылок можно найти в [1, 12–15, 22, 30–34, 53, 57–59, 62, 63, 67–69, 71, 75–80]. Часто в качестве подсказки нам служили вычисления, проведенные в F_4 по совершенно другим поводам, кроме работ Майкла Стайна

[62] и Эйичи Абе [32], это, в частности, работы Владимира Нестерова и Ани Штайнбах по геометрии корневых подгрупп [23, 64, 65].

Многие утверждения, доказанные в [12] для E_6, переносятся на случай F_4 практически без изменений вместе с доказательствами. В таких случаях мы только намечаем доказательства и отсылаем читателя к [12] по поводу деталей. С другой стороны, между случаями E_6 и F_4 имеются отличия, наиболее существенные из которых проистекают из того, что в F_4 не все корни имеют одинаковую длину, и поэтому в большинстве утверждений случаи длинных и коротких корней приходится рассматривать отдельно. Более того, многие утверждения работы [12] верны, as stated, только для длинных корней, что создает огромное дополнительное напряжение в центральной части доказательства.

Работа организована следующим образом. В §2 мы формулируем основные структурные теоремы для группы Шевалле типа F_4 над произвольным коммутативным кольцом, которые доказаны в настоящей работе. В §3–5 мы описываем наши основные инструменты: минимальный модуль E_6, скручивание E_6 до F_4 и допустимые пары. В §6 и 7 доказывается несколько простых утверждений технического характера, относящихся к централизаторам унипотентных элементов и извлечению из параболических подгрупп. Техническим ядром работы является §8, приведённое там доказательство *основной леммы* воплощает самую суть нашего метода. Доказательства структурных теорем завершаются в §9.

§2. Структурные теоремы

Ситуация с описанием нормальных подгрупп в группах типа F_4 несколько отличается от случаев E_6 и E_7. Начиная работу над настоящей статьей, мы были уверены, что имеющаяся литература содержит *полный* ответ на вопрос об описании нормальных делителей в группах Шевалле ранга ≥ 2 над коммутативными кольцами. Оказалось, что это так, *за исключением* случая F_4. Работа Абе [32] действительно даёт замечательно остроумное описание подгрупп в $G(F_4, R)$, нормализуемых $E(F_4, R)$, для совершенно произвольного коммутативного кольца R в терминах допустимых пар идеалов (A, B). В то же время в ней, как и в остальных опубликованных работах, нет ни общего механизма редукции по уровню для случая F_4, ни ответов на многие естественно возникающие вопросы, относящиеся к относительным группам, определённым допустимыми парами.

Сформулируем, прежде всего, принадлежащий Эйичи Абе основной результат об описании подгрупп в группе Шевалле типа F_4, нормализуемых элементарной подгруппой. Определения фигурирующих в этой теореме допустимых пар и относительных элементарных групп напоминаются в следующем параграфе.

Теорема 1. *Для произвольного коммутативного кольца R в группе Шевалле $\mathrm{G}(\mathrm{F}_4, R)$ имеет место стандартное описание подгрупп, нормализуемых элементарной группой $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$. А именно для каждой такой подгруппы H существует единственная допустимая пара идеалов (A, B) кольца R такая, что*

$$\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R, A, B) \leq H \leq \mathrm{C}(\mathrm{F}_4, R, A, B).$$

Полная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{C}(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ здесь определяется не в терминах гомоморфизма редукции, а внутренними средствами, как транспортер $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$ в $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R, A, B)$. Мы не пытаемся передоказывать те результаты работ Абе, которые доказываются *элементарными* вычислениями, заметим, кстати, что некоторые из этих вычислений содержались еще в [62]. Мы предлагаем свою версию центрального фрагмента доказательства теоремы 1. А именно, доказательства в работах Васерштейна и Абе основаны на предложенном Квилленом и Суслиным методе локализации-склеивания, т.е. в конечном счете на редукции к локальным кольцам.

В настоящей работе, *в основном* являющейся изложением дипломной работы второго автора, выполненной под руководством первого автора, мы предлагаем принципиально другое доказательство этой теоремы, которое, как и доказательства в [3, 66, 12], основано на редукции к группам меньшего ранга, а именно в данном случае к группам типов B_3 и C_3.

Первой неприятной неожиданностью для нас оказалось то, что в опубликованных работах по нормальному строению групп Шевалле нет работающего аппарата редукции по уровню. А именно, в [34, 71, 31, 32] происходит редукция к локальным кольцам, а для локальных колец редукция по уровню сразу сводится к редукции по модулю радикала Джекобсона. Это значит, что при помощи редукции к меньшему рангу из нашей основной леммы *непосредственно* вытекает лишь следующая *слабая* структурная теорема.

Теорема 2. *Пусть R — любое коммутативное кольцо, а H — подгруппа в группе Шевалле $\mathrm{G}(\mathrm{F}_4, R)$ нормализуемая элементарной группой $\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R)$. Тогда существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что*

$$\mathrm{E}(\mathrm{F}_4, R, A, A_2) \leq H \leq \mathrm{C}(\mathrm{F}_4, R, A).$$

Здесь A_2 (не путать с A_2!) обозначает идеал, порожденный всеми 2ξ и ξ^2 для $\xi \in A$ (см. §5). Разумеется, в случае, когда $A_2 = A$ для всех идеалов, например, если $2 \in R^*$, это и есть обычная структурная теорема, формулируемая в терминах *одного* идеала. Именно в таком виде она и была доказана в дипломной работе второго автора и в §8 работы [13].

Однако в дальнейшем мы решили, что было бы полезно полностью прояснить ситуацию и передоказать нашим методом теорему Абе в общем случае, без каких-либо ограничений на основное кольцо. Для классических групп механизм редукции по уровню, не зависящий от обратимости 2, создан в гл. IV диссертации Тони Бака [38], см. также [43, 54]. Но чтобы провести эту редукцию, необходимо, прежде всего, решить несколько естественных вопросов, которые для группы типа F_4 оставались открытыми. Вот некоторые наиболее важные из них.

• Является ли группа $E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ нормальной в $G(\mathrm{F}_4, R)$?

• Что такое главная конгруэнц-подгруппа $G(\mathrm{F}_4, R, A, B)$?

• Совпадают ли между собой различные определения полной конгруэнц-подгруппы $C(\mathrm{F}_4, R, A, B)$?

В литературе ответы на эти вопросы имеются *только* при различных упрощающих предположениях, типа $2 \in R^*$, гарантирующих, что мы оказываемся в классической ситуации, когда $A = B = A_2$. Сформулируем ответ на эти вопросы в общем случае.

Теорема 3. *Для любой допустимой пары* (A, B) *группа* $E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ *нормальна в* $G(\mathrm{F}_4, R)$ *и имеют место равенства*

$$\begin{aligned} C(\mathrm{F}_4, R, A, B) &= \{g \in G(\mathrm{F}_4, R) \mid [g, E(\mathrm{F}_4, R)] \le E(\mathrm{F}_4, R, A, B)\} \\ &= \{g \in G(\mathrm{F}_4, R) \mid [g, E(\mathrm{F}_4, R)] \le G(\mathrm{F}_4, R, A, B)\} \\ &= \{g \in G(\mathrm{F}_4, R) \mid [g, G(\mathrm{F}_4, R)] \le G(\mathrm{F}_4, R, A, B)\} \\ &= G(\mathrm{F}_4, R, A, B). \end{aligned}$$

Мы видим три основных возможных пути доказательства теоремы 3.

• Релятивизация Стайна с двумя параметрами, в духе того, что происходит в §4 и 5 работы [42] или в §1 работы [40].

• Теоретико-групповое доказательство в духе предложенного Алексеем Степановым в [27], где нужное нам рассуждение скрыто под словами „непосредственно следует“ в доказательстве следствия 3.4.

• Локализационное доказательство, имитирующее доказательства в [41, 68, 53, 40].

Первые два подхода смотрелись бы вполне органично в контексте основной части настоящей работы. Нам, однако, не удалось пока угадать подходящий аналог конструкций из [42]. С другой стороны, теоретико-групповое доказательство основано на том, что между подгруппами

$E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ и $C(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ лежит *какая-то* нормальная в G подгруппа. В классических ситуациях такая подгруппа хорошо известна — это главная конгруэнц-подгруппа $G(\Phi, R, I)$. В нашей ситуации $G(\mathrm{F}_4, R, A, B) = C(\mathrm{F}_4, R, A, B)$. Мы, конечно, умеем явно задавать группу $G(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ как матричную группу степени 27 сравнениями по модулю различных идеалов в духе сетевых подгрупп Боревича (для групп Шевалле соответствующая конструкция проведена в [16]). Однако непосредственная проверка нормальности $G(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ в $G(\mathrm{F}_4, R)$ сопряжена с достаточно тягостными вычислениями[1].

Поэтому мы, хотя и не без некоторых колебаний, решили вообще опустить это доказательство, просто сославшись на локализационное доказательство из работы [40]. Вместо теоремы 3 при выводе теоремы 1 из теоремы 2 мы пользуемся другим трудным внешним фактом, стандартностью описания нормальных подгрупп в $G(\mathrm{D}_4, R)$. Эта стандартность была впервые установлена Игорем Голубчиком в 1975 г. [19] и после этого многократно обобщалась и передоказывалась [20, 56, 72, 66, 43]. См. по этому поводу [13], где, в частности, отмечено, что *первоначальное* доказательство Голубчика как раз и было A_2-доказательством в смысле [12] в отличие от A_3-доказательств из [66] и [43] и, таким образом, содержало в зачаточном виде основную идею доказательства из Книги.

§3. 27-мерный модуль

Основным используемым в настоящей работе инструментом, как и в [77, 12, 14, 79], является 27-мерный модуль $V = V(\varpi_1)$ группы Шевалле $G = G(\mathrm{E}_6, R)$ типа E_6 со старшим весом $\omega = \varpi_1$. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается множество весов модуля V. Так как это представление микровесовое, то $\Lambda = W(\mathrm{E}_6)\omega$. В дальнейшем мы фиксируем кристаллический базис v^λ, $\lambda \in \Lambda$, модуля V. Это значит, что выполнены следующие условия.

• Базис v^λ состоит из весовых векторов.

• Базис v^λ допустим, иными словами, для любого корня $\alpha \in \Phi$ и любого $\xi \in R$ выполняется равенство

$$x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda\alpha}\xi v^{\lambda+\alpha},$$

причём все структурные константы действия $c_{\lambda\alpha}$ равны ± 1.

• Структурные константы $c_{\lambda\alpha}$ равны $+1$ для простых и отрицательных простых корней, т.е. $c_{\lambda\alpha} = +1$, если $\alpha \in \pm\Pi$.

[1] Ровно для того, чтобы избежать подобных матричных вычислений, притом в *более простом* случае унитарной группы, в [42] и был развит вариант релятивизации с двумя параметрами.

Существование такого базиса является классическим фактом, в [77] и [8] можно найти два элементарных доказательства, а в [15] — явные таблицы знаков структурных констант в кристаллическом базисе, которые мы, впрочем, в настоящей работе не используем.

Ещё один важнейший структурный элемент, связанный с этим модулем, которому посвящена *огромная* литература, — это инвариантная кубическая форма. Изучение этой формы инициировали Леонард Диксон и Эли Картан в самом начале XX в. Позже она стала основным инструментом в работах 1950-х и 1960-х гг. по геометрии исключительных групп [61]. Наконец, сравнительно недавно она превратилась в важнейший инструмент при изучении подгрупп $G(\mathrm{E}_6, R)$ и $G(\mathrm{F}_4, R)$, см., в частности, [35, 36, 47] и дальнейшие ссылки в [75, 77, 15, 14]. Упомянем некоторые недавние статьи, посвящённые её изучению. В работе [15] приведён явный вид этой формы для различных выборов базиса. В [14] с её помощью явно выписаны уравнения, определяющие принадлежность матрицы $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ нормализатору группы $G(\mathrm{E}_6, R)$. Наконец, в [44] обсуждается правильное определение кубической формы над кольцами, аналогичное баковскому определению квадратичной формы. Совершенно замечательно и полностью неожиданно то, что в доказательствах настоящей работы нет *никаких* ссылок на существование этой формы или вообще на какие-либо нетривиальные уравнения на элементы матриц из $G(\mathrm{E}_6, R)$ или $G(\mathrm{F}_4, R)$!

Ниже на рис. 1 воспроизведена *весовая диаграмма* — или, что в данном случае то же самое, кристаллический граф — этого модуля. Напомним, что вершинами этой диаграммы занумерованы весами модуля V, а метки на ребрах соответствуют простым корням, нумерация которых у нас такая же, как в [5]. В работе [15] проведено детальное компьютерное изучение этого модуля. Там среди прочего можно найти списки весов этого модуля в различных реализациях, структурные константы, образы корневых элементов, инвариантную кубическую форму и её производные, а также написанные на языке `Mathematica` коды для вычисления всего этого добра.

Как и в других работах по структурной теории, в которых используются представления, мы изображаем вектор $a \in V$, $a = \sum a_\lambda v^\lambda$, как *столбец* координат $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. При этом элемент b контраградиентного модуля V^* естественно представлять себе как *строку* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Разумеется, по отношению к весам Λ^* контраградиентного модуля V^* картина обратная: элементы V^* представляются *столбцами* $b = (b_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$, а элементы V — *строками* $a = (a_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^*$.

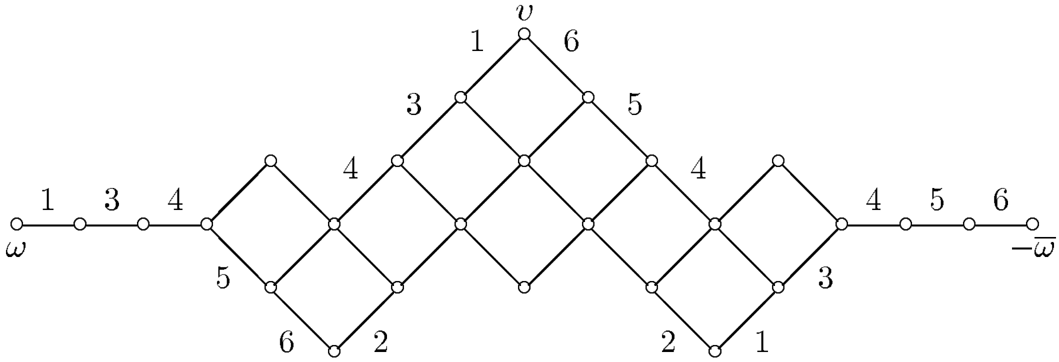

Рис. 1. (E_6, ϖ_1)

При этом элемент $g \in G(\mathrm{E}_6, R)$ обычно отождествляется со своим образом в представлении π и изображается (27×27)-матрицей $g = (g_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ. Как обычно, столбцами этой матрицы являются столбцы координат векторов gv^μ, $\mu \in \Lambda$, по отношению к базису v^λ, $\lambda \in \Lambda$. Мы будем часто пользоваться следующим обозначением: μ-й столбец матрицы g будет обозначаться через $g_{*\mu}$, а λ-я строка — через $g_{\lambda *}$. Обратная к g матрица обозначается $g^{-1} = (g'_{\lambda\mu})$, $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Стоит подчеркнуть, что в настоящей работе, как и в [12], и столбцы и строки матриц индексируются весами $\lambda, \mu \in \Lambda$ самого модуля V. Это как раз и значит, что координаты вектора из V^* нумеруются весами модуля V и записываются как строки — обычно в теории представлений они нумеруются весами модуля V^* и записываются как столбцы. Ровно поэтому формулы, описывающие действие элементов группы G на столбцы и на строки, в следующей лемме выглядят по-разному. Само же утверждение представляет собой переформулировку определения допустимого базиса.

Лемма 1. *Для любых $g \in \mathrm{GL}(27, R)$, $\alpha \in \Phi$ и $\xi \in R$ имеют место формулы*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \pm \xi g_{\lambda-\alpha,\mu}, \quad (gx_\alpha(\xi))_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} \pm \xi g_{\lambda,\mu+\alpha}.$$

Как уже отмечалось, знаки в вышеприведённых формулах можно уточнить, но нам это здесь не понадобится.

Сформулируем несколько очевидных утверждений о весах представления $(\mathrm{E}_6, V(\varpi_1))$. В цитированных работах эти утверждения доказаны в большей общности (по крайней мере, для микровесовых представлений систем без кратных связей), однако для целей настоящей работы достаточно считать, что $\Phi = \mathrm{E}_6$, $\Lambda = \Lambda(\varpi_1)$. Напомним, что в этом случае орбиты группы Вейля на парах весов (λ, μ), $\lambda, \mu \in \Lambda$, определяются единственным инвариантом, а именно расстоянием $d(\lambda, \mu)$ в *весовом графе*, в котором в отличие от весовой диаграммы изображаются ребра, отвечающие *всем* положительным корням, а не только простым. Для E_6 это расстояние может принимать три значения, оно равно 0, если $\lambda = \mu$, оно равно 1, если $\lambda - \mu \in \Phi$, и, наконец, оно равно 2, если $\lambda \neq \mu$ и разность $\lambda - \mu$ не является корнем.

Следующее утверждение представляет собой лемму 3 работы [77].

Лемма 2. *Пусть $\lambda \in \Lambda$, а $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$. Тогда если $\lambda + \alpha + \beta \in \Lambda$, то ровно одна из сумм $\lambda + \alpha$ либо $\lambda + \beta$ принадлежит Λ.*

Следующее утверждение — это предложение 2 работы [12] (после исправления очевидной опечатки, а именно в [12] пропущено условие $\alpha \neq \lambda - \rho$, сравни с леммой 3 той же работы).

Лемма 3. *Если $\lambda - \alpha, \rho + \alpha \in \Lambda$, причем $\alpha \neq \lambda - \rho$, то $d(\lambda, \rho) = 2$.*

§4. F_4 как скрученная E_6

В настоящей работе мы используем две реализации системы корней $\Phi = \mathrm{F}_4$. С одной стороны, это обычная реализация в 4-мерном эвклидовом пространстве,

$$\mathrm{F}_4 = \Big\{ \pm e_i,\ \pm e_i \pm e_j,\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4) \Big\},$$

$1 \leq i \neq j \leq 4$, а знаки пробегаются независимо. Корни вида $\pm e_i \pm e_j$ являются длинными и в дальнейшем множество длинных корней обозначается через Φ_l. Остальные корни короткие, их множество обозначается через Φ_s. В качестве простых корней мы, как обычно, выбираем

$$\alpha_1 = e_2 - e_3, \quad \alpha_2 = e_3 - e_4, \quad \alpha_3 = e_4, \quad \alpha_4 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4).$$

Максимальный корень относительно этого порядка равен $\delta = e_1 + e_2$, а доминантный короткий корень — $\rho = e_1$. Обычно мы записываем корень $\alpha = p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3 + s\alpha_4 \in \mathrm{F}_4$ в форме Дынкина как $pqrs$. Например, в этих обозначениях $\delta = 2342$, а $\rho = 1232$.

С другой стороны, мы реализуем F_4 как скрученную систему корней типа E_6. А именно рассмотрим систему корней E_6 и выберем в ней систему простых корней $\Pi = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6\}$, напомним, что мы используем такую же нумерацию, как в [5], так что, например, β_2 ортогонален всем простым корням, кроме β_4. Рассмотрим внешний автоморфизм $\alpha \longrightarrow \overline{\alpha}$ порядка 2 системы E_6, переставляющий β_1 с β_6, β_3 с β_5 и оставляющий на месте β_2 и β_4. Теперь мы можем мыслить корни F_4 как орбиты этого автоморфизма.

Корни F_4

Длинные корни F_4

$$e_2 - e_3 = 1000 = \begin{matrix}00000\\1\end{matrix} \qquad e_3 - e_4 = 0100 = \begin{matrix}00100\\0\end{matrix}$$

$$e_2 - e_4 = 1100 = \begin{matrix}00100\\1\end{matrix} \qquad e_3 + e_4 = 0120 = \begin{matrix}01110\\0\end{matrix}$$

$$e_2 + e_4 = 1120 = \begin{matrix}01110\\1\end{matrix} \qquad e_2 + e_3 = 1220 = \begin{matrix}01210\\1\end{matrix}$$

$$e_1 - e_2 = 0122 = \begin{matrix}11111\\0\end{matrix} \qquad e_1 - e_3 = 1122 = \begin{matrix}11111\\1\end{matrix}$$

$$e_1 - e_4 = 1222 = \begin{matrix}11211\\1\end{matrix} \qquad e_1 + e_4 = 1242 = \begin{matrix}12221\\1\end{matrix}$$

$$e_1 + e_3 = 1342 = \begin{matrix}12321\\1\end{matrix} \qquad e_1 + e_2 = 2342 = \begin{matrix}12321\\2\end{matrix}$$

Короткие корни F_4

$$e_4 = 0010 = \left\{\begin{matrix}01000\\0\end{matrix}, \begin{matrix}00010\\0\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4) = 0001 = \left\{\begin{matrix}10000\\0\end{matrix}, \begin{matrix}00001\\0\end{matrix}\right\}$$

$$e_3 = 0110 = \left\{\begin{matrix}01100\\0\end{matrix}, \begin{matrix}00110\\0\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4) = 0011 = \left\{\begin{matrix}11000\\0\end{matrix}, \begin{matrix}00011\\0\end{matrix}\right\}$$

$$e_2 = 1110 = \left\{\begin{matrix}01100\\1\end{matrix}, \begin{matrix}00110\\1\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 - e_4) = 0111 = \left\{\begin{matrix}11100\\0\end{matrix}, \begin{matrix}00111\\0\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 - e_4) = 1111 = \left\{\begin{matrix}11100\\1\end{matrix}, \begin{matrix}00111\\1\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) = 0121 = \left\{\begin{matrix}11110\\0\end{matrix}, \begin{matrix}01111\\0\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 - e_3 + e_4) = 1121 = \left\{\begin{matrix}11110\\1\end{matrix}, \begin{matrix}01111\\1\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 - e_4) = 1221 = \left\{\begin{matrix}11210\\1\end{matrix}, \begin{matrix}01211\\1\end{matrix}\right\}$$

$$\tfrac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = 1231 = \left\{\begin{matrix}12210\\1\end{matrix}, \begin{matrix}01221\\1\end{matrix}\right\}$$

$$e_1 = 1232 = \left\{\begin{matrix}12211\\1\end{matrix}, \begin{matrix}11221\\1\end{matrix}\right\}$$

В дальнейшем мы следующим образом интерпретируем корневые элементы F_4 в группе типа E_6:

$$\begin{aligned}
&x_{\alpha_1}(\xi)=x_{\beta_2}(\xi),\quad x_{\alpha_2}(\xi)=x_{\beta_4}(\xi),\quad x_{\alpha_3}(\xi)=x_{\beta_3}(\xi)x_{\beta_5}(\xi),\\
&x_{\alpha_4}(\xi)=x_{\beta_1}(\xi)x_{\beta_6}(\xi),
\end{aligned}$$

обратите внимание на выбор знаков, отличающийся от того, что происходит в [25]! Вообще любой корневой элемент группы $G(\mathrm{F}_4,R)$ в этой реализации имеет вид $x_\beta(\xi)$, где $\overline{\beta}=\beta$ (длинные корневые элементы), или вид $x_\beta(\xi)x_{\overline{\beta}}(\pm\xi)$, где $\overline{\beta}\neq\beta$ (короткие корневые элементы). Хотя в настоящей работе это нам и не понадобится, приведём в справочных целях явный выбор знаков в коротких корневых элементах:

$$\begin{aligned}
x_{0001}(\xi)&=x_{\substack{10000\\0}}(\xi)x_{\substack{00001\\0}}(\xi), & x_{0010}(\xi)&=x_{\substack{01000\\0}}(\xi)x_{\substack{00010\\0}}(\xi),\\
x_{0011}(\xi)&=x_{\substack{11000\\0}}(\xi)x_{\substack{00011\\0}}(-\xi), & x_{0110}(\xi)&=x_{\substack{01100\\0}}(\xi)x_{\substack{00110\\0}}(-\xi),\\
x_{1110}(\xi)&=x_{\substack{01100\\1}}(\xi)x_{\substack{00110\\1}}(-\xi), & x_{0111}(\xi)&=x_{\substack{11100\\0}}(\xi)x_{\substack{00111\\0}}(\xi),\\
x_{1111}(\xi)&=x_{\substack{11100\\1}}(\xi)x_{\substack{00111\\1}}(\xi), & x_{0121}(\xi)&=x_{\substack{11110\\0}}(\xi)x_{\substack{01111\\0}}(-\xi),\\
x_{1121}(\xi)&=x_{\substack{11110\\1}}(\xi)x_{\substack{01111\\1}}(-\xi), & x_{1221}(\xi)&=x_{\substack{11210\\1}}(\xi)x_{\substack{01211\\1}}(-\xi),\\
x_{1231}(\xi)&=x_{\substack{12210\\1}}(\xi)x_{\substack{01221\\1}}(-\xi), & x_{1232}(\xi)&=x_{\substack{12211\\1}}(\xi)x_{\substack{11221\\1}}(\xi),
\end{aligned}$$

Изобразим теперь весовую диаграмму ограничения 27-мерного представления $G(\mathrm{E}_6,R)$ на $G(\mathrm{F}_4,R)$ в этом вложении. Метки на ребрах отвечают теперь обычной нумерации простых корней $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ (корни α_1,α_2 длинные).

В то время как группа Вейля $W(\mathrm{E}_6)$ действовала на Λ транзитивно, для $W(\mathrm{F}_4)$ это уже совершенно не так. А именно представление $(\mathrm{E}_6,\varpi_1)\downarrow\mathrm{F}_4$ приводимо и является прямой суммой 26-мерного представления на коротких корнях и тривиального 1-мерного представления. Таким образом, $W(\mathrm{F}_4)\omega$ состоит из 24 весов, которые соответствуют коротким корням F_4. В дальнейшем мы для разнообразия их так и занумеруем.

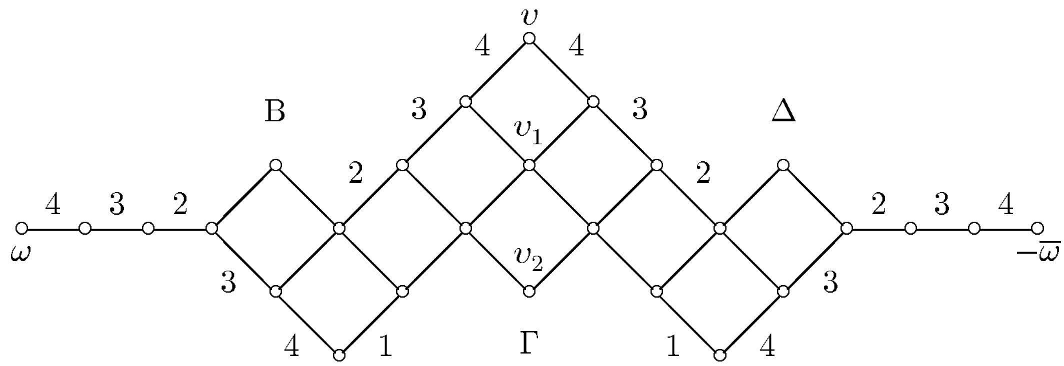

Рис. 2. $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{F}_4$

При описании конкретных вычислений с весами нам будет удобно использовать структуру ограничения $(\mathrm{E}_6, \varpi_1) \downarrow \mathrm{D}_4$. Поскольку D_4 регулярно вложена в E_6, для нахождения этого ограничения достаточно вычеркнуть в диаграмме (E_6, ϖ_1) ребра, помеченные 1 и 6. С точки зрения F_4 мы интересуемся ограничением на B_3, которое получается вырезанием всех ребер, помеченных 4 (впрочем, при этом одно из получающихся 8-мерных представлений будет приводимым). Таким образом, это представление распадается в прямую сумму трех одномерных представлений, отвечающих весам $\omega = 1232$, υ и $-\overline{\omega} = -1232$, и трех 8-мерных представлений. Обозначим через $\mathrm{B}, \Gamma, \Delta$ множества весов этих представлений, в порядке убывания высоты их старшего веса. При обозначении весов как коротких корней F_4 имеем

$$\mathrm{B} = \{1231, 1221, 1121, 0121, 1111, 0111, 0011, 0001\},$$

а $\Delta = -\mathrm{B}$ состоит из противоположных корней. С другой стороны, Γ состоит из корней $1110, 0110, 0010$, противоположных к ним, и еще двух *нулевых* весов υ_1 и υ_2.

§5. Допустимые пары

Напомним, прежде всего, как выглядит стандартное описание нормальных подгрупп в группе Шевалле типа F_4. Разумеется, так как F_4 имеет корни разных длин, такое описание должно даваться в терминах *пар* идеалов кольца R, а не одного идеала! Разумеется, при различных упрощающих предположениях таких, например, как $2 \in R^*$, это описание вырождается в описание в терминах одного идеала.

В дальнейшем $\Phi = \mathrm{F}_4$. Через $\Phi_l = \mathrm{D}_4$ обозначается множество длинных корней системы Φ, а через Φ_s — множество ее коротких корней.

Следующее понятие было введено в работах Абе [30–32] и Абе–Судзуки [34]. Пусть A — идеал в R. Обозначим через A_2 идеал, порожденный 2ξ и ξ^2 для всех $\xi \in A$. Пара идеалов (A, B) кольца R называется **допустимой**, если $A_2 \leq B \leq A$.

При упрощающем предположении, что каждый элемент ξ кольца R принадлежит идеалу, порожденному 2ξ и ξ^2, выполняется равенство $A_2 = A$. Таким образом, в этом случае допустимые пары (A, B) находятся во взаимно-однозначном соответствии с идеалами $I = A = B$ кольца R, и мы возвращаемся к обычному понятию стандартного описания в терминах одного идеала.

Допустимой паре (A, B) можно сопоставить **относительную элементарную подгруппу** $E(\Phi, R, A, B)$ уровня (A, B), которая определяется как *нормальная* подгруппа в $E(\Phi, R)$, порожденная элементарными корневыми унипотентами уровня (A, B). Иными словами,

$$E(\Phi, R, A, B) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi_s, \xi \in A;\ x_\beta(\zeta), \beta \in \Phi_l, \zeta \in B\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

В случае $A = B = I$ это понятие специализируется в обычное понятие относительной элементарной группы

$$E(\Phi, R, I) = \langle x_\alpha(\xi), \alpha \in \Phi, \xi \in I\rangle^{E(\Phi,R)}.$$

Следующий результат сразу вытекает из определения $E(\Phi, R, A, B)$ и того, что каждый корень системы F_4 вкладывается в подсистему типа A_2.

Лемма 4. *Для любой допустимой пары* (A, B) *имеет место равенство*

$$[E(\Phi, R), E(\Phi, R, A, B)] = E(\Phi, R, A, B).$$

Зададим теперь образующие $\mathrm{E}(\Phi, R, A, B)$ *как подгруппы*. Для корня $\alpha \in \Phi$ и двух элементов кольца $\xi, \zeta \in R$ положим

$$z_\alpha(\xi, \zeta) = x_\alpha(\zeta)x_{-\alpha}(\xi)x_\alpha(-\zeta).$$

Замечание. Наше обозначение отличается от того, которое использует Абе, знаком при корне. Кроме того, определение элемента $z_\alpha(\xi, \zeta)$ в п. 2.4 работы [32] содержит опечатку в порядке аргументов. Из следующих определений очевидно, что используется такой же порядок, как у нас.

Из коммутационной формулы Шевалле легко вывести, что $E(\Phi, R, I)$ порождается содержащимися в ней элементами $z_\alpha(\xi, \zeta)$ (см., *например*, [71, теорема 2]). Аналогичный результат имеет место и для группы $E(\Phi, R, A, B)$, хотя доказательство в этом случае требует гораздо большего напряжения [32, предложение 2.4] (ср. также [42, предложение 5.1]).

Лемма 5. *Группа $E(\Phi, R, A, B)$ порождается содержащимися в ней элементами вида $z_\alpha(\xi,\zeta)$. Иными словами,*

$$E(\Phi, R, A, B){=}\big\langle z_\alpha(\xi,\eta), \alpha\in\Phi_s, \xi\in A, \eta\in R; z_\beta(\zeta,\eta), \beta\in\Phi_l, \zeta\in B, \eta\in R\big\rangle.$$

Отсюда сразу вытекает такой результат, который будет использован в доказательстве теоремы 1.

Лемма 6. *Для любой допустимой пары имеет место равенство*

$$E(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R, A, B)E(\mathrm{D}_4, R, A).$$

Доказательство. В самом деле, группа $E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$ нормальна в $E(\mathrm{F}_4, R)$ и тем более в $E(\mathrm{F}_4, R, A)$, так что произведение в правой части является подгруппой, содержащей все образующие левой части. □

В дальнейшем мы обозначаем через H подгруппу в $G(\Phi, R)$, нормализуемую $E(\Phi, R)$. С каждой такой подгруппой можно естественно связать допустимую пару (A, B), которую естественно трактовать как **нижний уровень** этой подгруппы. Следующий результат является частным случаем теорем 1 и 2 работы [32].

Лемма 7. *Для любого корня $\alpha\in\mathrm{F}_4$ множество*

$$I_\alpha = \{\xi\in R \mid x_\alpha(\xi)\in H\}.$$

образует идеал в H. Этот идеал зависит не от α, а только от его длины. Если положить $A = I_\alpha$ для короткого корня α и $B = I_\beta$ для длинного корня β, то (A, B) является допустимой парой. При этом

$$\mathrm{E}(\Phi, R, A, B)\le H,$$

причём (A, B) является наибольшей допустимой парой с таким свойством.

Построенная в этой лемме допустимая пара называется допустимой парой, **ассоциированной** с подгруппой H. При упомянутом выше упрощающем предположении $A = B$, и мы возвращаемся к обычному определению нижнего уровня как наибольшего идеала $I \trianglelefteq R$ такого, что $E(\Phi, R, I)\le H$.

Определим теперь **полную конгруэнц-подгруппу** $C(\Phi, R, A, B)$ уровня (A, B) как транспортер абсолютной элементарной группы в относительную элементарную группу уровня (A, B):

$$C(\Phi, R, A, B) = \{g\in G(\Phi, R) \mid [g, E(\Phi, R)]\le E(\Phi, R, A, B)\}.$$

Как всегда, в случае $A = B = I$ мы обозначаем соответствующую полную конгруэнц-подгруппу просто $C(\Phi, R, I)$. По определению $\mathrm{E}(\Phi, R, A, B)$ нормальна в элементарной группе $E(\Phi, R)$. К сожалению, опубликованные работы не дают ответа на вопрос, будет ли для $\Phi = \mathrm{F}_4$ эта группа нормальна во всей группе Шевалле $G(\Phi, R)$. В то же время этот факт (как и некоторые другие коммутационные формулы такого типа) абсолютно необходим для того, чтобы провести доказательство структурных теорем при помощи редукции по уровню с последующей подгонкой допустимой пары, как это делается в [38].

Для случая $A = B = I$ это действительно так. Следующий результат легко получается при помощи релятивизации из доказанной Джованни Таддеи [69] нормальности элементарной подгруппы (см., например, [71, теорема 1]).

Лемма 8. *Для любой неприводимой системы корней ранга ≥ 2 относительная элементарная группа $\mathrm{E}(\Phi, R, I)$ нормальна в группе Шевалле $G(\Phi, R)$. При этом*

$$[\mathrm{E}(\Phi, R), \mathrm{C}(\Phi, R, I)] \leq \mathrm{E}(\Phi, R, I).$$

Комбинируя этот результат с основным результатами статьи Абе–Харли [33], легко получить следующий результат [32, следствие 4].

Лемма 9. *Если, кроме того, группа $E(\Phi, R)$ совершенна, то для любого идеала $I \trianglelefteq R$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} C(\Phi, R, I) &= \{g \in G(\Phi, R) \mid [g, G(\Phi, R)] \leq G(\Phi, R, I)\} \\ &= \{g \in G(\Phi, R) \mid [g, E(\Phi, R)] \leq G(\Phi, R, I)\} \\ &= \{g \in G(\Phi, R) \mid [g, E(\Phi, R)] \leq E(\Phi, R, I)\}. \end{aligned}$$

Как известно [62], единственные случаи, среди групп ранга ≥ 2, когда элементарная группа $E(\Phi, R)$ не является совершенной, — это группы типа B_2 или G_2 над коммутативным кольцом R, имеющим поля вычетов $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

§6. Централизаторы унипотентных элементов

В настоящем параграфе мы докажем несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся нам при извлечении из параболической подгруппы и в доказательстве основной леммы. Начнем с вычисления централизатора элементарного корневого элемента $x_\alpha(\xi)$. Так как сомнительно, чтобы доказательства в настоящей работе могли заинтересовать кого-то, кто уже не прочёл [12], мы предполагаем, что эта статья у читателя перед глазами, и не будем воспроизводить оттуда §6, посвящённый общим фактам о строении параболических подгрупп. Напомним лишь основные обозначения. Для любого $1 \leq i \leq l$ через P_i обозначается стандартная параболическая подгруппа, получающаяся выбрасыванием корня

$-\alpha_i$ для некоторого простого корня $\alpha_i \in \Pi$. Через L_i и U_i обозначаются её подгруппа Леви и унипотентный радикал, а через U_i^- — унипотентный радикал противоположной параболической подгруппы P_i^- с той же подгруппой Леви, получающейся выбрасыванием α_i. Через Δ_i обозначается система корней L_i, а через Σ_i — множество корней U_i. Коммутанты, центральные ряды и остальные теоретико-групповые конструкции понимаются в смысле теории алгебраических групп.

Следующий результат представляет собой лемму 8 работы [12]. В дальнейшем мы иногда используем обозначение $g_{\lambda\mu}$ и в тех случаях, когда λ и/или μ не является весом. В таком случае $g_{\lambda\mu}$ считается равным нулю.

Лемма 10. *Если элемент $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ коммутирует с корневым элементом $x_\alpha(\xi)$ для какого-то корня $\alpha \in \Phi$, то*

(1) $\xi g_{\lambda\mu} = 0$, *если* $\lambda + \alpha \in \Lambda$, *но* $\mu + \alpha \notin \Lambda$;
(2) $\xi g_{\lambda\mu} = 0$, *если* $\mu - \alpha \in \Lambda$, *но* $\lambda - \alpha \notin \Lambda$;
(3) $\xi(g_{\lambda\mu} - g_{\lambda+\alpha,\mu+\alpha}) = 0$, *если* $\lambda + \alpha, \mu + \alpha \in \Lambda$.

Следующий результат по существу представляет собой предложение 4 работы [12]. Правда, сформулирован он там в чуть менее точном виде, но доказывается именно это, конечно, не для длинных корней F_4, а для всех корней E_6.

Предложение 1. *Если $[g, x_\alpha(1)] = 1$ для какого-то элемента $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ и какого-то длинного корня $\alpha \in \mathrm{F}_4$, то g лежит в параболической подгруппе $P \leq \mathrm{GL}(27, R)$ типа $(6, 15, 6)$, пересечение которой с группой Шевалле типа F_4 в описанном в §3 вложении представляет собой подгруппу типа P_1 в последней.*

Примерно также доказывается и аналог предыдущего предложения для случая коротких корней. Впрочем, между этими результатами имеется серьезное отличие. А именно в случае длинных корней централизатор совпадает с параболической подгруппой с точностью до одномерного тора, если быть совсем точным, то P_1 как раз и является нормализатором корневой подгруппы X_δ. Для коротких корней это не так, в централизатор попадают не все элементы унипотентного радикала, но поскольку в доказательстве основной леммы нам всё равно нужно уметь справляться с произвольными элементами из P_4, то для дальнейших редукций нам важно лишь, что централизатор $x_\alpha(1)$ для короткого корня *содержится* в P_4. Разумеется, для поля это хорошо известно, а для кольца ничего не меняется, так как параметр равен 1. С другой стороны, ниже мы установим чуть более общий результат о централизаторах коротких корневых элементов в $\mathrm{GL}(27, R)$.

Предложение 2. *Если* $[g, x_\alpha(1)] = 1$ *для какого-то элемента* $g \in \mathrm{GL}(27, R)$ *и какого-то короткого корня* $\alpha \in \mathrm{F}_4$*, то* g *лежит в параболической подгруппе* $P \leq \mathrm{GL}(27, R)$ *типа* $(9, 9, 9)$*, пересечение которой с группой Шевалле типа* F_4 *в описанном в* §3 *вложении представляет собой подгруппу типа* P_4 *в последней.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $\alpha = \rho = 2132$. Зафиксируем следующий порядок весов: старший вес ω, потом веса из B в таком порядке

$$\mathrm{B}_1 = \{1231, 1111, 0111, 0011\}, \quad \mathrm{B}_2 = \{1221, 1121, 0121, 0001\},$$

потом веса 1110, 0110, 0010, потом нулевые веса $\upsilon_1, \upsilon, \upsilon_2$, потом веса -0010, -0110, -1110, далее веса $-\mathrm{B}_2$ и $-\mathrm{B}_1$ в противоположном порядке и, наконец, младший вес $-\omega^*$. Заглянув в таблицы работы [20] (например, посмотрев на явный вид элементов $e_{\substack{12211\\1}}$ и $e_{\substack{11221\\1}}$ в таблице 10), мы видим, что в таком базисе $x_\rho(1)$ имеет вид

$$x_\rho(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для доказательства утверждения о централизаторе $x_\rho(1)$ в $\mathrm{GL}(27, R)$ остаётся, как и в [12], сослаться на лемму 7. С другой стороны, прибавлений между υ и остальными 8 центральными весами в F_4 (и даже в E_6) нет. В сочетании с отсутствием прибавлений вниз между девятками это значит, что при пересечении с F_4 диаграмма прорезается по 5 расположенным в её середине ребрам с меткой 1 и 5 симметричным ребрам с меткой 6. Тогда она, конечно, прорезается и по 2 крайним ребрам с метками 1 и 6. Это и значит, что в первом столбце никаких прибавлений вниз нет, так что все его недиагональные элементы нулевые, и мы попали в P_4. □

Замечание. Пересечение этой подгруппы типа $(9, 9, 9)$ с так вложенной E_6 является субмаксимальной параболической подгруппой с подгруппой Леви типа D_4.

Следующий аналог леммы 11 работы [12] также сразу вытекает из коммутационной формулы Шевалле.

Лемма 11. *Элементарная группа $E(\mathrm{F}_4, R)$ порождается унипотентными радикалами двух противоположных параболических подгрупп U_1 и U_1^- или U_4 и U_4^- соответственно.*

Доказательство. Любой длинный/короткий корень $\gamma \in \Delta_i$ есть разность двух длинных/коротких корней $\alpha, \beta \in \Sigma_i$. Поэтому

$$x_\gamma(\xi) = [x_a(\pm\xi), x_{-\beta}(1)] \in \langle U_i, U_i^- \rangle. \qquad \square$$

С учетом теоремы 2 работы [37] следующий результат вытекает отсюда точно так же, как предложение 7 работы [12]. Мы не будем воспроизводить из дипломной работы второго автора прямое элементарное доказательство этого результата в духе §8 работы [12], не ссылающееся на результаты о строении U_i как L_i-модуля. Как замечено по этому поводу в [12], такое доказательство является просто упражнением в терпении.

Предложение 3. *Пусть $i = 1, 4$. Если элемент $z \in L_i$ коммутирует со всеми $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Sigma_i$, то он централен.*

§7. Извлечение из параболических подгрупп

В настоящем параграфе мы продолжаем предполагать, что H — подгруппа в $G(\mathrm{F}_4, R)$, нормализуемая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Напомним, что центр группы $G(\mathrm{F}_4, R)$ равен центру группы $E(\mathrm{F}_4, R)$ равен 1. Нашей целью является доказательство того, что если H содержит нетривиальный элемент, содержащийся в собственной параболической подгруппе, то H содержит нетривиальный корневой элемент. Хотя этот результат справедлив в общем случае, мы докажем его только в следующих двух случаях, когда мы будем его фактически использовать.

• Параболическая подгруппа P_1 с подгруппой Леви типа C_3. Унипотентный радикал U_1 экстраспециален. Иными словами, $[U_1, U_1] = X_\delta = C(U_1)$, а фактор-группа $U_1/[U_1, U_1]$ является 14-мерным фундаментальным модулем группы $\mathrm{Sp}(6, R)$.

• Параболическая подгруппа P_4 с подгруппой Леви типа B_3. В этом случае $[U_1, U_1]$ является естественным 7-мерным модулем группы $\mathrm{Spin}(7, R)$, в то время как $U_1/[U_1, U_1]$ — это её 8-мерный спинорный модуль.

Предложение 4. *Если H содержит нетривиальный элемент, лежащий в собственной параболической подгруппе P_1 или P_4, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. Будем считать, что $g = zv \in P_i$, где $i = 1, 4$, $z \in L_i$, $v \in U_i$, причем $z \neq \varepsilon e$. Фиксируем $\alpha \in \Sigma_i$ и рассмотрим коммутатор

$$u = [g, x_\alpha(1)] = [zv, x_\alpha(1)] = {}^z[v, x_\alpha(1)][z, x_\alpha(1)].$$

При этом первый из коммутаторов лежит в $[U_i, U_i]$, а второй — в U_i. В силу предложения 3 найдётся такой корень α, для которого $u \neq e$. Наша первая цель состоит в том, чтобы заработать, когда это возможно, нетривиальный элемент уже в *коммутанте* унипотентного радикала $[U_i, U_i]$. В случае P_1 это, разумеется, и завершит доказательство.

В случае P_1 рассмотрим разложение $u = \prod x_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha \in \Sigma_1$. Если $u_\alpha \neq 0$ для какого-то *длинного* корня $\alpha \neq \delta$, либо $2u_\alpha \neq 0$ для какого-то *короткого* корня α, то

$$[u, x_{\delta-\alpha}(1)] = x_\delta(\pm c_\alpha u_\alpha) \in H,$$

где $c_\alpha = 1$ или $c_\alpha = 2$, в зависимости от того, длинный α или короткий, как раз и является требуемым нетривиальным [длинным] корневым элементом. Таким образом, можно считать, что $c_\alpha u_\alpha \neq 0$ для всех корней $\alpha \in \Sigma_1$, кроме, быть может, δ. Тем самым коэффициент u_δ не зависит от порядка корней в Σ_1, и если $u_\delta \neq 0$, то

$$y = [u, x_{-\alpha_1}(1)] \in H \cap U_1,$$

причём в разложении $y = \prod x_\alpha(y_\alpha)$, $\alpha \in \Sigma_1$, имеем $y_{\delta-\alpha_1} = \pm u_\delta \neq 0$, так что мы снова оказываемся в уже рассмотренной ситуации. Таким образом, нам остаётся только рассмотреть случай, когда $c_\alpha u_\alpha = 0$ для *всех* корней $\alpha \in \Sigma_1$, но при этом $u_\alpha \neq 0$ для какого-то короткого корня α. Ясно, что, не теряя общности, можно считать, что $u_{1110} \neq 0$. Так как $2u_\alpha = 0$ для всех коротких корней, то входящие в u множители $x_\alpha(u_\alpha)$ коммутируют, а

$$[u, x_{\alpha_4}(1)] = x_{1111}(\pm u_{1110}) x_{1232}(\pm u_{1231}) \in H.$$

Прокоммутировав еще раз, мы видим, что

$$[[u, x_{\alpha_4}(1)], x_{\alpha_3}(1)] = x_{1121}(\pm u_{1110}) \in H$$

есть нетривиальный [короткий] корневой элемент в H.

В случае P_4 все 6 длинных корней из Σ_4 имеют коэффициент 2 при α_4 и, значит, попадают в $\Sigma_4(2)$. Пусть $u = \prod x_\alpha(u_\alpha)$, $\alpha \in \Sigma_1$, причём коэффициенты u_α при коротких корнях $\alpha \neq \rho$ определены однозначно. Если $2u_\alpha \neq 0$ для какого-то из таких коротких корней, то, взяв подходящий корень $\beta \in \Sigma_1$, $\beta \neq \rho$, мы получим нетривиальный элемент $[u, x_\beta(1)] \in [U_4, U_4]$. В самом деле, в этом случае можно, не теряя общности, считать, что уже $2u_{\alpha_4} \neq 0$, так что $\alpha = \alpha_4$. Взяв $\beta = 0121$, получим

$$[u, x_{0121}(1)] = x_{0122}(\pm 2u_{\alpha_4}) y \in H \cap [U_4, U_4],$$

где y есть произведение $x_\gamma(*)$ по большим, чем 0122, корням из Σ_1, а именно, 1122, 1222, $\rho = 1232$, 1242, 1342, $\delta = 2342$. Таким образом, мы нашли нетривиальный элемент в $H \cap [U_4, U_4]$.

С другой стороны, если $2u_\alpha = 0$ для всех коротких корней $\alpha \in \Sigma_1$, $\alpha \neq \rho$, но $u_\alpha \neq 0$ для какого-то из этих корней, то

$$[u, x_{\rho-\alpha}(1)] = x_\rho(\pm u_\alpha) \in H$$

есть нетривиальный [короткий] корневой элемент в H. Поэтому в дальнейшем мы можем считать, что $u_\alpha = 0$ для всех коротких корней $\alpha \in \Sigma_1$, $\alpha \neq \rho$, так что в этом случае сам $u \in H \cap [U_4, U_4]$ нетривиален.

Пусть вначале $u_\gamma \neq 0$ для какого-то *длинного* корня $\gamma \in \Sigma_1$; мы можем, не теряя общности, считать, что уже $u_{0122} \neq 0$, так что $\gamma = 0122$. В этом случае

$$[u, x_{\alpha_1}(1)] = x_{1122}(\pm u_{0122}) x_\delta(*) \in H,$$

и, таким образом, окончательно

$$[[u, x_{\alpha_1}(1)], x_{\alpha_2}(1)] = x_{1222}(\pm u_{0122}) \in H$$

является требуемым нетривиальным [длинным] корневым элементом. Это значит, что $u_\gamma = 0$ для всех длинных корней $\gamma \in \Sigma_1$, так что с самого начала $u = x_\rho(u_\rho) \in H$ был нетривиальным [коротким] корневым элементом в H. Это и заканчивает доказательство предложения. □

Выведем из данного предложения два следствия. Их доказательства почти дословно совпадают с доказательствами соответствующих следствий в [12]. Заметим, прежде всего, что так как центр группы $G(\mathrm{F}_4, R)$ тривиален, то нам не нужно никакого аналога предложения 5 работы [12]. Именно поэтому мы и не должны требовать здесь, чтобы корни α и β были длинными.

Следствие 1. *Если $x_\alpha(\xi)x_\beta(\zeta)$ стабилизирует первый столбец матрицы $g \in H$, но не коммутирует с g, то H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. По условию $z = [g, x] \in H$ лежит в параболической подгруппе P_4. Так как x не коммутирует с g, то z нетривиален, а тогда по предложению H содержит нетривиальный корневой элемент. □

Следствие 2. *Если для нетривиального элемента $g \in H$ его коммутатор $[g, x_\alpha(1)]$ с корневым элементом $x_\alpha(1)$ для какого-то корня $\alpha \in \Phi$ централен, то H содержит нетривиальный элементарный корневой элемент.*

Доказательство. В самом деле, из предложения 1, если α длинный, или предложения 2, если α короткий, следует, что элемент g содержится в параболической подгруппе типа P_1 или P_4 соответственно, так что к нему можно применить предложение настоящего параграфа. □

§8. Основная лемма

Мы подошли к главному среди вспомогательных результатов настоящей работы. Именно в доказательстве этого результата содержится основной вычислительный трюк, воплощающий суть нашего доказательства. Мы продолжаем считать, что $\omega = \varpi_1$ — первый фундаментальный вес системы корней E_6.

Основная лемма. *Фиксируем вес $\lambda \in W(\mathrm{F}_4)\omega$. Предположим, что для какого-то нетривиального элемента $g \in H$ выполняется равенство $g'_{\rho\lambda} = 0$ для всех $\rho \in \Lambda$, $d(\lambda, \rho) = 2$. Тогда H содержит нетривиальный корневой элемент.*

Доказательство. Доказательство начинается так же, как в случае E_6. Разумеется, теперь ключевое вычисление проходит только для длинных корней, так что нам недостаточно требовать, чтобы разность двух весов была корнем, нам необходимо, чтобы она была *длинным* корнем. Это вносит значительное дополнительное техническое напряжение по сравнению с работой [12]. Первый (трудный!) шаг состоит в доказательстве того, что или H содержит нетривиальный корневой элемент или *квадрат* идеала I в R, порождённого элементами $g_{\mu\lambda} = 0$, $\mu \neq \lambda$, равен 0. После этого доказательство завершается совсем легко. В качестве следующего приближения мы докажем, что или H содержит нетривиальный корневой элемент или сам идеал I равен 0. Но в последнем случае элемент g содержится в собственной параболической подгруппе, и мы можем сослаться на предложение 4.

• Ясно, что, заменяя g на сопряжённый к нему при помощи элемента из $N(\mathrm{F}_4, R)$, можно, не теряя общности, считать, что $\lambda = \omega$. Это не влияет на общие рассуждения, но, как только начинаются реальные вычисления, их, конечно, гораздо проще проводить именно с первым столбцом матрицы g.

• Легко видеть, что для любого $\lambda \in W(\mathrm{F}_4)\omega$ существует шесть весов $\mu \in \Lambda$ таких, что $\lambda - \mu$ есть длинный корень. Разумеется, все они в действительности лежат в $W(\mathrm{F}_4)\omega$. Например, при $\lambda = \omega$ это в точности лежащие в Γ веса $1110, 0110, 0010$ и противоположные к ним. Легко видеть, что эти веса образуют одну орбиту под действием группы Вейля $W(\mathrm{B}_3)$, стабилизирующей ω.

Рассмотрим любые два различных веса $\mu, \nu \in \Lambda$ таких, что $\alpha = \lambda - \mu$, $\beta = \lambda - \nu$ суть длинные корни, и рассмотрим корневой элемент

$$x = x(\mu, \nu) = x_\alpha(g'_{\nu\lambda}) x_\beta(\varepsilon g'_{\mu\lambda}).$$

Выбор знака $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta) = \pm 1$ будет конкретизирован чуть ниже. Теперь, как и в работе [12], образуем коммутатор

$$z = z(\mu, \nu) = [x, g] \in H.$$

Так как корни α, β *длинные*, то в нашем вычислении ничего не изменится по сравнению со случаем E_6. А именно если мы возьмём любой вес $\rho \neq \mu, \nu$, то по лемме 3 из $\rho + \alpha \in \Lambda$ или $\rho + \beta \in \Lambda$ следует, что $d(\lambda, \rho) = 2$. Однако по условию $g'_{\rho\lambda} = 0$ для всех таких ρ. Таким образом, умножение на элемент x^{-1} производит в столбце матрицы g^{-1} с номером λ ровно два прибавления, оба к диагональному элементу $g'_{\lambda\lambda}$, причём элемент $g'_{\nu\lambda}$ прибавляется к нему с коэффициентом $\pm g'_{\mu\lambda}$, а элемент $g'_{\nu\lambda}$ — с коэффициентом $\pm\varepsilon g'_{\mu\lambda}$.

Ясно, что выбором $\varepsilon = \pm 1$ можно добиться того, чтобы эти прибавления компенсировались, для этого не нужно даже знать соответствующие структурные константы $c_{\mu\alpha}$ и $c_{\nu\beta}$ и тем самым столбец матрицы g^{-1} с номером λ вообще не менялся, иными словами, выполнялось равенство

$$(x^{-1} g^{-1})_{*\lambda} = x^{-1} g'_{*\lambda} = g'_{*\lambda}.$$

Но тогда, конечно,

$$(g x^{-1} g^{-1})_{*\lambda} = g g'_{*\lambda} = v^\lambda.$$

Так как представление (E_6, ϖ_1) микровесовое, то $\lambda + \alpha, \lambda + \beta$ не являются весами и, значит, $x v^\lambda = v^\lambda$. Но тогда

$$z_{*\lambda} = (x g x^{-1} g^{-1})_{*\lambda} = x v^\lambda = v^\lambda,$$

так что для любых таких μ, ν элемент $z = z(\mu, \nu)$ попадает в собственную параболическую подгруппу типа P_1 группы $G(\mathrm{E}_6, R)$ и тем самым в собственную параболическую подгруппу типа P_4 группы $G(\mathrm{F}_4, R)$.

Если хотя бы один из этих элементов нетривиален, то мы можем воспользоваться parabolic reduction. А именно предложение предыдущего параграфа даст нам нетривиальный корневой унипотент.

• Это значит, что в дальнейшем мы можем ограничиться случаем, когда *все* такие z тривиальны, сейчас мы постараемся выяснить, что это означает для исходной матрицы g. Иными словами, в этом случае g^{-1} коммутирует со всеми $x = x(\mu, \nu)$. Вычислим элементы матриц $g^{-1}x$ и xg^{-1} в позиции (ρ, σ):

$$(g^{-1}x)_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\nu\lambda} g'_{\rho,\sigma+\alpha} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\rho,\sigma+\beta} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\nu\lambda} g'_{\rho,\sigma+\alpha+\beta},$$

$$(xg^{-1})_{\rho\sigma} = g'_{\rho\sigma} \pm g'_{\nu\lambda} g'_{\rho-\alpha,\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\beta,\sigma} \pm g'_{\mu\lambda} g'_{\nu\lambda} g'_{\rho-\alpha-\beta,\sigma},$$

причём по лемме 2 для каждой позиции из трех возможных новых слагаемых в каждом из этих выражений одновременно появляются не более двух.

В первую очередь нас будет интересовать случай, когда в правых частях обоих этих равенствах появляется *единственное* новое слагаемое. Приравнивая эти выражения, мы видим, что тогда это новое слагаемое равно нулю.

• Прежде всего, возьмём здесь $\sigma = \mu$, где, как и выше, $\mu \in \Lambda$ такой вес, что $\alpha = \lambda - \mu \in \Phi_l$. Далее пусть ρ — вес на расстоянии 1 от λ такой, что $\rho - \alpha \notin \Lambda$. В этом случае найдётся вес $\nu \in \Lambda$ такой, что $\beta = \lambda - \nu \in \Phi_l$, причём $\mu + \beta, \mu + \alpha + \beta, \rho - \beta \notin \Lambda$. Начиная с этого места, для упрощения обозначений мы предполагаем, что $\lambda = \omega$, $\mu = 1110$, как уже отмечалось, это не приводит к потере общности. В этом случае те веса ρ, для которых $\rho - \alpha$ является весом, это в точности $\omega, 0121, 0111, 0011, 0001$ и -1110. Мы утверждаем, что для всех остальных весов требуемое ν найдётся. В самом деле, в этом случае условие, что $\mu + \beta$ не является весом, выполнено автоматически, так как все допустимые ν меньше, чем μ. Чтобы гарантировать, что и $\rho - \beta$ не является весом, достаточно заметить, что для $\rho = 1231, 1221$, а также для $\rho = 0010, \upsilon_1, \upsilon_2$ или -0010 годится $\nu = 0110$. Для $\rho = 1121$ годится $\nu = 0110$ или -0110. Наконец, для $\rho = 1111$ годится $\nu = -0010$.

Подставляя теперь в равенства из предыдущего пункта вначале $\sigma = \mu$, а потом $\sigma = \nu$, мы видим, что $g'_{\rho\lambda} g'_{\mu\lambda} = 0$ для всех таких μ и ρ. Для случая E_6 доказательство на этом было бы практически закончено, так как в этом случае для каждого из весов $\mu \neq \lambda$ выполняется по крайней мере одно из следующих утверждений: $\lambda - \mu$ — длинный корень или $g'_{\mu\lambda} = 0$. Для F_4 доказательство на этом только начинается, так как пока мы не доказали даже, что $g'_{\rho\lambda} g'_{\mu\lambda} = 0$ для таких весов μ, что $\lambda - \mu$ — длинный корень, не говоря уже про то, что мы вообще не начинали рассматривать равенства $g'_{\rho\lambda} g'_{\mu\lambda} = 0$ для случая, когда оба корня $\lambda - \mu, \lambda - \rho$ короткие!

• Пусть, как и выше, $\mu \in \Lambda$ такой вес, что $\alpha = \lambda - \mu \in \Phi_l$. В качестве очередного шага докажем, что $g'_{\rho\lambda} g'_{\mu\lambda} = 0$ для всех $\rho \neq \lambda$. Для этого мы поступим следующим образом. Возьмём любой корень γ — возможно, короткий! — и рассмотрим коммутатор

$$z = z(\mu, \gamma) = [x_\gamma(g'_{\mu\lambda}), g] \in H.$$

Умножение на корневой элемент $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$ производит в столбце матрицы g^{-1} с номером λ шесть или тринадцать прибавлений, в зависимости от того, длинный корень γ или короткий. Постараемся понять, когда эти прибавления не меняют столбец g с номером λ. Ясно, что это эквивалентно выполнению условия $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\lambda}=0$ для всех $\rho\in\Lambda$ таких, что $\rho-\gamma\in\Lambda$. В этом случае точно такое же вычисление, как то, которое было проведено выше для матриц $z(\mu,\nu)$, показывает, что $z_{*\lambda}=v^{\lambda}$, так что $z=z(\mu,\gamma)$ попадает в параболическую подгруппу типа P_1 группы $G(\mathrm{E}_6,R)$. Таким образом, мы снова можем заключить, что H содержит нетривиальный корневой элемент или же элемент $z=z(\mu,\gamma)$ тривиален и, следовательно, равен 1.

Итак, на следующем шаге доказательства мы займемся поиском таких корней γ, что для каждого $\rho\neq\lambda$ выполняется по крайней мере одно из трех следующих утверждений:

- ∘ $\rho-\gamma\notin\Lambda$,
- ∘ $d(\rho-\gamma,\lambda)=2$,
- ∘ на предыдущих шагах уже доказано, что $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\lambda}=0$.

Доказательство в следующем пункте будет происходить в несколько проходов и будет устроено примерно следующим образом. Из предыдущих рассуждений следует, что, как только нам удастся найти корень γ с таким свойством, мы оказываемся в следующей ситуации: H содержит нетривиальный корневой элемент или g коммутирует с $x_\gamma(g'_{\mu\lambda})$. В последнем случае имеет место соотношение

$$g'_{\rho\sigma}\pm g'_{\mu\lambda}g'_{\rho-\gamma,\sigma}=(x_\gamma(g'_{\mu\lambda})g^{-1})_{\rho\sigma}=(g^{-1}x_\gamma(g'_{\mu\lambda}))_{\rho\sigma}=g'_{\rho\sigma}\pm g'_{\mu\lambda}g'_{\rho,\sigma+\gamma}.$$

Это соотношение даст нам новые равенства вида $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho\lambda}=0$, которые можно применить для поиска дальнейших корней γ с таким свойством.

• Начиная с этого места, для упрощения обозначений мы предполагаем, что $\lambda=\omega$, $\mu=1110$. Нам нужно доказать, что $g'_{\mu\omega}g'_{\rho\omega}=0$ для таких ρ, для которых $\rho-\alpha$ является весом.

Мы утверждаем, что короткий корневой элемент $x_{0001}(g'_{\mu\omega})$ стабилизирует первый столбец матрицы g^{-1}. В самом деле, 8 из 13 прибавлений в первом столбце, а именно 5 прибавлений при помощи $x_{\beta_1}(*)$, 2 прибавления при помощи $x_{\beta_6}(*)$ и прибавление через нулевой вес, происходят с позиций (ρ,ω), где $d(\rho,\omega)=2$, и, таким образом, $g'_{\rho\omega}=0$. Остальные пять прибавлений происходят с позиций (ρ,ω) при $\rho=1231,1110,0110,0010$ и v_1, про которые на одном из предыдущих шагов уже доказано, что $g'_{\mu\lambda}g'_{\rho,\lambda}=0$. Таким образом, это прибавление действительно стабилизирует первый столбец матрицы g^{-1}. Это значит, что далее мы можем, не теряя общности, считать, что g коммутирует с $x_{0001}(g'_{\mu\omega})$. Но тогда подстановка в формулу предыдущего пункта $\rho=0121$ и $\sigma=\mu$ даёт новое равенство $g'_{\mu\omega}g'_{\rho\omega}=0$. Разумеется, точно такое же рассуждение с другим выбором γ годится для всех весов ρ, которые можно перевести в 0121 элементом

$W(\mathrm{F}_4)$, оставляющим на месте ω и μ, т.е. $\rho = 0111, 0011, 0001$. А именно для этих случаев нужно взять $\gamma = 0011, 0111, 0121$ соответственно.

Это значит, что из того, что заявлено в предыдущем пункте, остаётся нерассмотренным только случай $\mu = 1110$, $\rho = -1110$. Поступим точно так же, как для остальных весов, но с другим выбором γ. А именно, мы утверждаем, что короткий корневой элемент $x_{1232}(g'_{\mu\omega})$ стабилизирует первый столбец матрицы g^{-1}. В самом деле, 11 из 13 прибавлений в первом столбце, а именно по 5 прибавлений при помощи $x_{\substack{11221\\1}}(*)$ и $x_{\substack{12211\\1}}(*)$ и прибавление через нулевой вес, происходят с позиций (ρ, ω), где $d(\rho, \omega) = 2$ и, таким образом, $g'_{\rho\omega} = 0$. Оставшиеся два прибавления — это прибавления с нулевых весов $\rho = v_1, v_2$, относительно которых уже известно, что $g'_{\mu\omega} g'_{\rho,\omega} = 0$. Таким образом, снова мы можем, не теряя общности, считать, что g коммутирует с $x_{1232}(g'_{\mu\omega})$. Но тогда подстановка в формулу предыдущего пункта $\rho = -1110$ и $\sigma = 1110$ даёт равенство $g'_{\mu\omega} g'_{\rho\omega} = 0$ в последнем случае, когда оно ещё не было доказано.

• Таким образом, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho\lambda} = 0$ для всех $\rho, \mu \in \Lambda$ таких, что $\lambda - \mu \in \Phi_l$. Чтобы рассмотреть остальные случаи, достаточно заметить, что мы могли заменить ξ в выражении $(x_\gamma(\xi) g^{-1})_{*\lambda} = g^{-1}_{*\lambda}$ на $g'_{\mu\lambda}$ для любого μ, и первый столбец будет стабилизирован, если $g'_{\mu\lambda} g'_{\rho-\gamma,\lambda} = 0$ для всякого $\rho \in \Lambda$. Уже доказанное включение (с заменой σ на $\lambda - \gamma$) даёт $g'_{\mu\lambda} g'_{\sigma\lambda} = 0$ для всех μ, σ таких, что существует такое γ, что первый столбец стабилизирован, $\tau - \gamma \notin \Lambda$ и $\lambda - \gamma \in \Lambda$. Теперь совсем просто найти такой корень γ для каждой пары весов. В действительности годится почти любой длинный корень γ, достаточно потребовать, чтобы $\tau - \gamma \notin \Lambda$, и тогда полученные в предыдущем пункте равенства гарантируют, что первый столбец автоматически будет стабилизирован (разность $\rho - \gamma$ с длинным корнем автоматически не равна v_1 или v_2).

• Итак, мы доказали, что $g'_{\mu\lambda} g'_{\nu\lambda} = 0$ для всех $\mu, \nu \in \Lambda$. Иными словами, если A — идеал в R, порождённый элементами $g'_{\mu\lambda}$, $\mu \neq \lambda$, то $A^2 = 0$. Кроме того, редукция по модулю A показывает, что и $g_{\mu\lambda} \in A$ для всех $\mu \neq \lambda$.

Осталось рассмотреть коммутатор $z = [g, x_\alpha(1)]$, $\alpha \in \Phi_l$. Столбец $v = x_\alpha(1) g^{-1}_{*\lambda}$ отличается от $g^{-1}_{*\lambda}$ только тем, что $v_\lambda = g'_{\lambda\lambda} + g'_{\mu\lambda}$, все остальные элементы совпадают. Это значит, что $gxg^{-1}_{*\lambda}$ пропорционален базисному столбцу v^λ, и z лежит в параболической подгруппе типа P_1. Теперь либо z нетривиален, и мы можем воспользоваться parabolic reduction, либо z тривиален, но тогда по предложению 1 уже сам g лежит в собственной параболической подгруппе и мы снова можем воспользоваться parabolic reduction. В каждом из этих случаев H содержит нетривиальный корневой унипотент. □

Замечание. В русском оригинале — но не в английском переводе! — в §8 статьи [13] при изложении доказательства этой леммы допущена систематическая опечатка. Из-за неправильной интерпретации TEX'овского макроса в форме Дынкина корней из E_7 коэффициент при α_2 повторен *дважды*: один раз на своем законном месте во второй строке, а второй раз как второй элемент первой строки.

§9. Стандартное описание

В настояшем параграфе мы завершим доказательство теорем 1 и 2. Разумеется, все эти мучения нужны только потому, что мы отказываемся накладывать условие $2 \in R^*$. При этом условии теорема 2 с $A = B$ *сразу* следует из нашей основной леммы редукцией по уровню с двумя параметрами в той форме, как она используется в [38, 43]. Никакие коммутационные формулы, за исключением леммы 7, при этом не используются.

Доказательство теоремы 2. Пусть, как обычно, H — нетривиальная подгруппа в $G = G(\mathrm{F}_4, R)$, нормализуемая $E(\mathrm{F}_4, R)$. Докажем, прежде всего, что H содержит нетривиальный корневой элемент. В самом деле, пусть $g \in H$, $g \neq 1$. Если g коммутирует хотя бы с одним длинным корневым элементом $x_\alpha(1)$, то H содержит нетривиальный корневой элемент по следствию 2.

С другой стороны, если g не коммутирует с каким-то *длинным* корневым элементом $x_\alpha(1)$, то, заменяя, если нужно, g на $[g, x_\alpha(1)] = (gx_\alpha(1)g^{-1})x_\alpha(-1)$, мы можем с самого начала считать, что $g \in H$ есть нетривиальный элемент следующего вида: произведение длинного корневого элемента на элементарный длинный корневой элемент. Элемент g не более чем в 6 столбцах отличается от корневого элемента. Это значит, что даже после отбрасывания 3 нулевых столбцов у нас всё ещё остаётся по крайней мере 18 столбцов, по отношению к которым g удовлетворяет условиям основной леммы. Это значит, что и в этом случае мы можем заключить, что H содержит нетривиальный корневой элемент.

Теперь доказательство теоремы 2 завершается стандартным рассуждением, известным как level reduction. А именно обозначим через B нижний уровень подгруппы H, т.е. наибольший идеал в R такой, что $E(\mathrm{F}_4, R, B) \leq H$. Как известно [62, 32], идеал B можно определить как множество $\xi \in R$ таких, что $x_\alpha(\xi) \in H$ для какого-то (=любого) *длинного* корня α. Рассмотрим образ $\overline{H} \leq G(\mathrm{F}_4, R/B)$ подгруппы H относительно гомоморфизма редукции $\pi_B : G(\mathrm{F}_4, R) \longrightarrow G(\mathrm{F}_4, R/B)$. Так как $\overline{H}$ нормализуется

$E(\mathrm{F}_4, R/B) = \pi_B(E(\mathrm{F}_4, R))$, согласно только что сказанному $\overline{H} \neq 1$ влечет, что $\overline{H}$ содержит нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\overline{\xi}) = x_\alpha(\xi + B)$ для некоторого $\xi \notin B$.

Это значит, что H содержит элемент вида $h = x_a(\xi)g$, для некоторого $g \in G(\mathrm{F}_4, R, B)$. Пусть теперь β — корень *той же длины*, что α, под углом $2\pi/3$ к нему. Тогда

$$[h, x_\beta(1)] = {}^{x_\alpha(\xi)}[g, x_\beta(1)][x_\alpha(\xi), x_\beta(1)] \in H.$$

Так как первый множитель принадлежит $E(\mathrm{F}_4, R, B)$ в силу леммы 9, второй множитель $x_{\alpha+\beta}(\pm\xi)$ тоже принадлежит H.

• Если корень α и тем самым корень $\alpha + \beta$ длинный, мы получаем противоречие с определением нижнего уровня.

• Если же корень α короткий, то из резюмированных в лемме 6 результатов [62, 32] следует, что $2\xi, \xi^2 \in B$.

Таким образом, если обозначить через A верхний уровень подгруппы H, т.е. множество $\xi \in R$ таких, что $x_\alpha(\xi) \in H$ для какого-то (=любого) *короткого* корня α, то $A_2 \leq B \leq A$. Рассмотрим теперь произведение $H \cdot E(\mathrm{F}_4, R, A)$, в котором никаких новых *коротких* корневых элементов не появляется, и поэтому нижний уровень равен верхнему и равен A. Если редукция $\overline{\overline{H}} = \pi_A(H) \leq G(\mathrm{F}_4, R/A)$ всё ещё нетривиальна, то точно такое же рассуждение, как выше, даёт нетривиальный корневой элемент $x_\alpha(\xi) \in H \cdot E(\mathrm{F}_4, R, A)$ для некоторого $\xi \notin A$, что противоречит определению уровня.

Поэтому $\overline{\overline{H}} = 1$, или, что то же самое, $H \cdot E(\mathrm{F}_4, R, A) \leq C(\mathrm{F}_4, R, A)$, так что определенный нами верхний уровень действительно является верхним уровнем в обычном смысле! Резюмируя сказанное выше, можно заключить, что

$$E(\mathrm{F}_4, R, A, A_2) \leq E(\mathrm{F}_4, R, A, B) \leq H \leq H \cdot E(\mathrm{F}_4, R, A) \leq C(\mathrm{F}_4, R, A),$$

как и утверждалось. □

В свою очередь теорема 1 теперь уже чисто формально вытекает из теоремы 2 и стандартного описания нормальных подгрупп в $G(\mathrm{D}_4, R)$. Конечно, мы могли сразу доказывать теорему 1, но предпочли выделить теорему 2, чтобы показать, что её доказательство — в отличие от доказательства теоремы 1! — не зависит от *каких-либо* внешних соображений.

Доказательство теоремы 1. Пусть $H \leq G(\mathrm{F}_4, R)$ — подгруппа, нормализуемая $E(\mathrm{F}_4, R)$. По теореме 2 существуют нижний уровень B и верхний уровень A, для которых $E(\mathrm{F}_4, R, A, B) \leq H \leq C(\mathrm{F}_4, R, A)$. Мы хотим показать, что тогда на самом деле $H \leq C(\mathrm{F}_4, R, A, B)$, или, что то же самое, $[H, E(\mathrm{F}_4, R)] \le E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$. С учетом лемм 6 и 8 из условия вытекает, что

$$E(\mathrm{F}_4, R, A, B) \le [H, E(\mathrm{F}_4, R)] \le E(\mathrm{F}_4, R, A) = E(\mathrm{F}_4, R, A, B)E(\mathrm{D}_4, R, A).$$

Таким образом, если $[H, E(\mathrm{F}_4, R)] \ne E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$, то группа $[H, E(\mathrm{F}_4, R)]$ содержит нетривиальный элемент из $E(\mathrm{D}_4, R, A) \setminus E(\mathrm{D}_4, R, B)$. Теперь для окончания доказательства остается лишь сослаться на стандартное описание нормальных подгрупп в $G(\mathrm{D}_4, R)$. В самом деле, из него следует, что $[H, E(\mathrm{F}_4, R)] \le H$ содержит длинный корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ для некоторого $\xi \in A \setminus B$. Но это противоречит определению нижнего уровня! Тем самым $[H, E(\mathrm{F}_4, R)] = E(\mathrm{F}_4, R, A, B)$, как и утверждалось. □

Замечание. Наше доказательство теоремы 1 следует схеме, предложенной в доказательстве предложения 3.3 гл. IV диссертации Энтони Бака [38, с. 4.22–4.27], где аналогичное рассуждение проведено для унитарной группы. А именно, там замечено, что сильная структурная теорема для группы G следует из слабой структурной теоремы для самой этой группы и сильной структурной теоремы для ее подходящей подгруппы. Разумеется, сама эта подгруппа в [38] строится иначе, чем у нас, с использованием условий стабильности. К сожалению, эта диссертация не была опубликована и даже те, у кого есть её текст, редко долетали до середины гл. IV, поэтому точное взаимоотношение слабой и сильной структурных теорем, как и тот факт, что без предположения $2 \in R^*$ стандартное описание должно формулироваться в терминах форменных идеалов ($\approx$ допустимых пар), известны лишь узкому кругу специалистов. Дело в том, что схема доказательства в работах Абе [32, 33] совершенно другая и основана на сведении к локальным кольцам, а для локальных колец в свою очередь проводится редукция по радикалу с последующей ссылкой на теорему Шевалле–Титса для случая поля. Поэтому редукция по уровню там не используется. В качестве курьёза отметим, что даже в статье [74], в которой номинально признаётся, что стандартное описание должно формулироваться в терминах форменных идеалов, относительный форменный параметр опущен в обозначениях. Как отмечено в [54], это приводит к прямой ошибке. Для классических групп ранга ≥ 3 все возникающие здесь вопросы детально обсуждаются в [43]. Для группы $\mathrm{Sp}(4, R)$ ситуация катастрофически сложнее и полностью разобрана в феерической работе Дугласа Косты и Гордона Келлера [49].

Авторы благодарят Вильберда ван дер Каллена, Виктора Петрова и Алексея Степанова за чрезвычайно полезные обсуждения различных аспектов этого доказательства. Значительная часть работы над этой статьей выполнена в университете Билефельда, и мы выражаем искреннюю признательность Тони Баку за гостеприимство и дружескую поддержку. Кроме того, мы благодарны Елизавете Дыбковой за внимательное чтение рукописи и замечания, способствовавшие улучшению текста.

Список литературы

[1] Абе Э., *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами*, Алгебра и анализ **5** (1993), №2, 74–90.

[2] Артин Э., *Геометрическая алгебра*, Наука, М., 1969.

[3] Боревич З. И., Вавилов Н. А., *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.

[4] Борель А., *Свойства и линейные представления групп Шевалле*, Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., 1973, с. 9–59.

[5] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV – VI, Мир, М., 1972.

[6] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли.* Гл. VII, VIII, Мир, М., 1978.

[7] Вавилов Н. А., *Подгруппы расщепимых классических групп*, Докт. дис., ЛГУ, Л., 1987, с. 1–334.

[8] Вавилов Н. А., *Как увидеть знаки структурных констант*? Алгебра и анализ **19** (2007), №4, 34–68.

[9] Вавилов Н. А., *Нумерология квадратных уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008) (в печати).

[10] Вавилов Н. А., *Вычисления в исключительных группах*, Вестн. Самар. ун-та (2007).

[11] Вавилов Н. А., *Разложение унипотентов в присоединенном представлении группы Шевалле типа* E_6, Алгебра и анализ **20** (2008) (в печати).

[12] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., A_2-*доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7, Алгебра и анализ **16** (2004), №4, 54–87.

[13] Вавилов Н. А., Гаврилович М. Р., Николенко С. И., *Строение групп Шевалле: доказательство из книги*, Зап. науч. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.

[14] Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., *Нормализатор группы Шевалле типа* E_6, Алгебра и анализ **19** (2007), №5, 35–62.

[15] Вавилов Н. А., Лузгарев А. Ю., Певзнер И. М., *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении*, Зап. науч. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.

[16] Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., *Сетевые подгруппы групп Шевалле.* I, II, Зап. науч. семин. ЛОМИ **94** (1979), 40–49; **114** (1982), 62–76.

[17] Вавилов Н. А., Плоткин Е. Б., Степанов А. В., *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами*, Докл. АН СССР **307** (1989), №4, 788–791.

[18] Голубчик И. З., *О полной линейной группе над ассоциативным кольцом*, Успехи мат. наук **28** (1973), №3, 179–180.

[19] Голубчик И. З., *О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией*, Успехи мат. наук **30** (1975), №6, 165.

[20] Голубчик И. З., *О нормальных делителях линейных и унитарных групп над ассоциативным кольцом*, Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей, Башк. гос. пед. ин-т, Уфа, 1985, с. 122–142.

[21] Дьедонне Ж., *Геометрия классических групп*, Мир, М., 1974.

[22] Лузгарев А. Ю., *О надгруппах* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6,\mathrm{R})$ *и* $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,\mathrm{R})$ *в минимальных представлениях*, Зап. науч. семин. ПОМИ **319** (2004), 216–243.

[23] Нестеров В. В., *Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле*, Алгебра и анализ **16** (2004), №6, 172–208.

[24] Спрингер Т. А., *Линейные алгебраические группы*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, т. 55, ВИНИТИ, М., 1989, с. 5–136.

[25] Стейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.

[26] Степанов А. В., *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами*, Канд. дис., ЛГУ, Л., 1987, с. 1–112.

[27] Степанов А. В., *О нормальном строении полной линейной группы над кольцом*, Зап. науч. семин. ЛОМИ **236** (1997), 166–182.

[28] Хамфри Дж., *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.

[29] Хамфри Дж., *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.

[30] Abe E., *Chevalley groups over local rings*, Tôhoku Math. J. (2) **21** (1969), no. 3, 474–494.

[31] Abe E., *Chevalley groups over commutative rings*, Radical Theory (Sendai, 1988), Uchida Rokakuho, Tokyo, 1989, pp. 1–23.

[32] Abe E., *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Algebraic K-Theory and Algebraic Number Theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 1–17.

[33] Abe E., Hurley J., *Centers of Chevalley groups over commutative rings*, Comm. Algebra **16** (1988), no. 1, 57–74.

[34] Abe E., Suzuki K., *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J. (2) **28** (1976), no. 2, 185–198.

[35] Aschbacher M., *The 27-dimensional module for* E_6. I – IV, Invent. Math. **89** (1987), no. 1, 159–195; J. London Math. Soc. **37** (1988), 275–293; Trans. Amer. Math. Soc. **321** (1990), 45–84; J. Algebra **131** (1990), 23–39.

[36] Aschbacher M., *Some multilinear forms with large isometry groups*, Geom. Dedicata **25** (1988), no. 1–3, 417–465.

[37] Azad H., Barry M., Seitz G. M., *On the structure of parabolic subgroups*, Comm. Algebra **18** (1990), 551–562.

[38] Bak A., *The stable structure of quadratic modules*, Thesis, Columbia Univ., 1969.

[39] Bak A., *Nonabelian* K*-theory: the nilpotent class of* K_1 *and general stability*, K-Theory **4** (1991), no. 4, 363–397.

[40] Bak A., Hazrat R., Vavilov N., *Localization-completion, application to relative classical-like groups*, J. Pure Appl. Algebra (2007) (to appear).

[41] Bak A., Vavilov N., *Normality for elementary subgroup functors*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **118** (1995), no. 1, 35–47.

[42] Bak A., Vavilov N., *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups*, Algebra Colloq. **7** (2000), no. 2, 159–196.

[43] Bak A., Vavilov N., *Structure of hyperbolic unitary groups.* II. *Normal subgroups*, Algebra Colloq. (to appear).

[44] Bak A., Vavilov N., *Cubic form parameters* (to appear).

[45] Bass H., *Unitary algebraic K-theory*, Algebraic K-Theory. III: Hermitian K-Theory and Geometric Applications (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., vol. 343, Springer, Berlin, 1973, pp. 57–265.

[46] Carter R., *Simple groups of Lie type*, Pure Appl. Math., vol. 28, John Wiley, London etc., 1972.

[47] Cohen A. M., Cooperstein B. N., *The 2-spaces of the standard* $\mathrm{E}_6(\mathrm{q})$*-module*, Geom. Dedicata **25** (1988), no. 1–3, 467–480.

[48] Costa D. L., Keller G. E., *The* $\mathrm{E}(2,\mathrm{A})$ *sections of* $\mathrm{SL}(2,\mathrm{A})$, Ann. of Math. (2) **134** (1991), no. 1, 159–188.

[49] Costa D. L., Keller G. E., *Radix redux: normal subgroups of symplectic groups*, J. Reine Angew. Math. **427** (1992), no. 1, 51–105.

[50] Costa D. L., Keller G. E., *On the normal subgroups of* $\mathrm{G}_2(\mathrm{A})$, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 12, 5051–5088.

[51] Hahn A. J., O'Meara O. T., *The classical groups and K-theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 291, Springer-Verlag, Berlin etc., 1989.

[52] Hazrat R., *Dimension theory and non-stable* K_1 *of quadratic modules*, K-Theory **27** (2002), 293–328.

[53] Hazrat R., Vavilov N., K_1 *of Chevalley groups are nilpotent*, J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.

[54] Hazrat R., Vavilov N., *Bak's work on lower K-theory of rings* (to appear).

[55] Li Fu An, *The structure of symplectic group over arbitrary commutative rings*, Acta Math. Sinica (N. S.) **3** (1987), no. 3, 247–255.

[56] Li Fu An, *The structure of orthogonal groups over arbitrary commutative rings*, Chinese Ann. Math. Ser. B **10** (1989), no. 3, 341–350.

[57] Matsumoto H., *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **2** (1969), 1–62.

[58] Plotkin E. B., *On the stability of the* K_1*-functor for Chevalley groups of type* E_7, J. Algebra **210** (1998), 67–85.

[59] Plotkin E. B., Semenov A. A., Vavilov N. A., *Visual basic representations: an atlas*, Internat. J. Algebra Comput. **8** (1998), no. 1, 61–95.

[60] Springer T. A., *Linear algebraic groups*, Progr. Math., vol. 9, Birkhäuser, Boston, MA, 1981.

[61] Springer T. A., Veldkamp F. D., *Octonions, Jordan algebras and exceptional groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[62] Stein M. R., *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **93** (1971), no. 4, 965–1004.

[63] Stein M. R., *Stability theorems for* K_1, K_2 *and related functors modeled on Chevalley groups*, Japan. J. Math. (N.S.) **4** (1978), no. 1, 77–108.

[64] Steinbach A. I., *Groups of Lie type generated by long root elements in* $\mathrm{F}_4(\mathrm{K})$, Habilitationsschrift, Gießen, 2000.

[65] Steinbach A. I., *Subgroups of the Chevalley groups of type* F_4 *arising from a polar space*, Adv. Geom. **3** (2003), 73–100.

[66] Stepanov A. V., Vavilov N. A., *Decomposition of transvections: a theme with variations*, K-Theory **19** (2000), 109–153.

[67] Suzuki K., *On normal subgroups of twisted Chevalley groups over local rings*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A **13** (1977), no. 366–382, 238–249.

[68] Suzuki K., *Normality of the elementary subgroups of twisted Chevalley groups over commutative rings*, J. Algebra **175** (1995), no. 2, 526–536.

[69] Taddei G., *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau*, Applications of Algebraic K-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Part II (Boulder, Colo., 1983), Contemp. Math., vol. 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, pp. 693–710.

[70] Vaserstein L. N., *On the normal subgroups of the* GL_n *over a ring*, Algebraic K-Theory, Evanston 1980 (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1980), Lecture Notes in Math., vol 854, Springer, Berlin–New York, 1981, pp. 456–465.

[71] Vaserstein L. N., *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings*, Tôhoku Math. J. (2) **38** (1986), no. 2, 219–230.
[72] Vaserstein L. N., *Normal subgroups of orthogonal groups over commutative rings*, Amer. J. Math. **110** (1988), no. 5, 955–973.
[73] Vaserstein L. N., *Normal subgroups of symplectic groups over rings*, K-Theory **2** (1989), no. 5, 647–673.
[74] Vaserstein L. N., You Hong, *Normal subgroups of classical groups over rings*, J. Pure Appl. Algebra **105** (1995), no. 1, 93–105.
[75] Vavilov N. A., *Structure of Chevalley groups over commutative rings*, Nonassociative Algebras and Related Topics (Hiroshima, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 219–335.
[76] Vavilov N. A., *Intermediate subgroups in Chevalley groups*, Groups of Lie Type and their Geometries (Como, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 207, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 233–280.
[77] Vavilov N. A., *A third look at weight diagrams*, Ren. Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
[78] Vavilov N. A., *Do it yourself structure constants for Lie algebras of type* E_l, Зап. науч. семин. ПОМИ **281** (2001), 60–104.
[79] Vavilov N. A., *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7, Internat. J. Algebra Comput. **17** (2007), no. 5–6, 1283–1298.
[80] Vavilov N. A., Plotkin E. B., *Chevalley groups over commutative rings. I. Elementary calculations*, Acta Appl. Math. **45** (1996), 73–115.
[81] Waterhouse W. C., *Introduction to affine group schemes*, Grad. Texts in Math., vol. 66, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1979.
[82] Wilson J. S., *The normal and subnormal structure of general linear groups*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 163–177.

Поступило 25 октября 2007 г.

С.-Петербургский
государственный университет
математико-механический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Университетский пр., 28
Россия

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Россия