Два аукциона и теорема о выявлении

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

Введение

- Сейчас мы проведём (больше для примера) подробный анализ двух моделей аукционов, которых мы уже раньше касались.
- Заодно поймём, что не всё так очевидно в этой науке, как доказательство правдивости аукциона Викри. :)

Sealed-bid

- Наши аукционы будут в форме sealed-bid auctions: когда участники подают заявки в конвертах, а потом их вскрывают и решают, кому отдать искомый объект.
- Их проще анализировать, и мы всё равно потом докажем, что открытые аукционы им эквивалентны.

First-price vs. second-price

- Мы проанализируем две модели.
- Первая — аукцион Викри, second-price sealed-bid auction (предмет достаётся тому, кто больше предложил, по цене второго сверху).
- Вторая — самая естественная, first-price sealed-bid auction (предмет достаётся тому, кто больше предложил, по его собственной цене).

Постановка задачи: агенты

- Итак, теперь всё по-взрослому. Есть N покупателей, которые сражаются за один объект.
- У каждого покупателя своя цена X_i (для других это случайная величина!), причём эта цена распределена на $[0, \omega]$ посредством неубывающей функции распределения $F : [0, \omega] \to [0, 1]$.
- В принципе возможно, что $\omega = \infty$, но в любом случае $\mathbf{E}[X_i] < \infty$.

Постановка задачи: информация

- Каждый участник i знает своё значение x_i (которое ему было выброшено по распределению X_i).
- Кроме того, он обладает полной информацией: знает все остальные распределения X_j.
- Не знает он только конкретных значений x_j, модель он знает полностью.

Постановка задачи: симметрия

- Важно: у каждого участника X_i *одна и та же* функция распределения F.
- И они это знают; это называется моделью с *симметричными* участниками.

Модель

- Аукцион Викри кажется сложнее, но для анализа он проще. Начнём с него.
- Каждый участник подаёт закрытую заявку b_i, после чего каждый получает такую прибыль:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - \max_{j \neq i} b_j, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{если } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

- В случае ничьи будем выбирать покупателя равновероятно.

Доминантная стратегия

- Вспомним, что мы уже доказывали раньше.

Теорема

В second-price sealed-bid аукционе стратегия делать ставку $b(x) = x$ является слабо доминирующей.

Доказательство

- Ожидаемая полезность стратегии $b_i(x_i) = x_i$ равна

$$u_i(b_i, b', x_i) = \begin{cases} x_i - b', & \text{если } x_i > b', \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

  где b' — это наивысшая ставка среди всех остальных агентов.
- Если $b' < x_i$, то оптимальна любая ставка $b_i \geq b'$ (вещь ведь всё равно продадут по цене b').
- Если $b' \geq x_i$, то, опять же, оптимальна любая ставка $b_i \leq x_i$ (всё равно не продадут).
- Ставка $b_i = x_i$ подходит в оба случая и поэтому является доминантной стратегией.

Сколько придётся заплатить

- Доказательство ничего не использовало: ни ожиданий агента о других агентах, ни предположений о распределениях... это хорошо.
- Следующий вопрос: сколько агент ожидает заплатить (и, как следствие, какую получить прибыль)?

Сколько придётся заплатить

- Фиксируем агента X_1 и рассмотрим случайную величину Y_1 — первую порядковую статистику $X_2, \ldots, X_N$ (максимум из них).
- Очевидно, Y_1 распределена как $G(y) = F(y)^{N-1}$ (вам не очевидно? докажите!).

Сколько придётся заплатить

- Итого агент X_1 ожидает в случае выигрыша своей ставки x заплатить

$$m(x) = \mathrm{Pr}[\text{Выигрыш}] \times \mathbf{E}[\text{2я ставка} \mid x \text{ — макс. ставка}] =$$
$$= \mathrm{Pr}[\text{Выигрыш}] \times \mathbf{E}[\text{2я ценность} \mid x \text{ — макс. ценность}] =$$
$$= G(x)\mathbf{E}[Y_1 \mid Y_1 < x] = F(x)^{N-1}\mathbf{E}[Y_1 \mid Y_1 < x].$$

- Вот и весь анализ; для этого случая.

Модель

- В обычном аукционе каждый участник подаёт закрытую заявку b_i, после чего каждый получает такую прибыль:

$$\Pi_i = \begin{cases} x_i - b_i, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, & \text{если } b_i < \max_{j \neq i} b_j. \end{cases}$$

- В случае ничьи будем выбирать покупателя равновероятно.

О правдивости

- Первое замечание: такой аукцион не просто окажется не правдивым, а и не может быть правдивым принципиально.
- Если участник сообщит свою настоящую цену, для него это равносильно отказу от участия в аукционе: он в любом случае получит нулевую прибыль.
- Поэтому теперь у нас будут полноценно участвовать функции $\beta(x)$ — возможные стратегии участников в зависимости от их скрытой ценности x.

Вывод оптимальной стратегии

- Рассмотрим первого участника. Он предполагает, что остальные следуют стратегии β, и хочет определить свою ставку.
- Граничные условия: он, конечно, не станет ставить больше $\beta(\omega)$, т.е. $b \leq \beta(\omega)$, и, кроме того, очевидно, что $\beta(0) = 0$.
- Первый участник выигрывает, когда $\max_{i \neq 1} \beta(X_1) < b$.

Вывод оптимальной стратегии

- Первый участник выигрывает, когда $\max_{i \neq 1} \beta(X_1) < b$.
- β неубывает, поэтому $\max_{i \neq 1} \beta(X_1) = \beta(\max_{i \neq 1} X_i) = \beta(Y_1)$.
- Значит, первый участник выигрывает, когда $Y_1 < \beta^{-1}(b)$.

Вывод оптимальной стратегии

- Значит, первый участник выигрывает, когда $Y_1 < \beta^{-1}(b)$.
- Его ожидаемая прибыль:

$$G(\beta^{-1}(b))(x - b),$$

где G — распределение Y_1.

Вывод оптимальной стратегии

- Найдём максимум $G(\beta^{-1}(b))(x-b)$ по b.
- Получится, что
$$\frac{G'(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))}(x-b) - G(\beta^{-1}(b)) = 0.$$
- Но мы ищем равновесную оптимальную стратегию, т.е. $b=\beta(x)$. Получим дифференциальное уравнение:
$$G(x)\beta'(x) + G'(x)\beta(x) = xg(x).$$

Вывод оптимальной стратегии

- $G(x)\beta'(x) + G'(x)\beta(x) = xG'(x)$.
- Заметим что это на самом деле $\frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)) = xG'(x)$.
- Итого, с учётом $\beta(0) = 0$, получаем ответ:

  $$\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yG'(y)dy = \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x]$$

  по определению условного мат. ожидания.
- То есть ожидаемая выплата участника равна $m(x) = G(x)\mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x]$.

Равновесная стратегия

- Мы вывели формулу для β, но ещё не доказали, что для участника с ценностью x действительно оптимально ставить $\beta(x)$, если остальные следуют стратегии β.
- У нас было только необходимое условие, но не достаточное.

Теорема

Стратегия

$$\beta(x) = \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x]$$

действительно является равновесной в first-price sealed-bid аукционе.

Доказательство

- Итак, пусть все, кроме агента 1, следуют $\beta(x) = \frac{1}{G(x)}\int_0^x yG'(y)dy = \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x]$.
- $\beta(x)$ — возрастающая непрерывная функция, значит, в равновесии выигрывает тот, у кого x был больше.
- Если 1 поставит $b > \beta(\omega)$, он получит отрицательную прибыль в любом случае.

Доказательство

- Итак, он ставит $b \leq \beta(\omega)$.
- Обозначим $z = \beta^{-1}(b)$ значение, для которого b — равновесная ставка. Участник 1 получит

$$\Pi(b, x) = G(z)(x - \beta(z)) =$$

$$= G(z)x - G(z)\mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < z] == G(z)x - \int_0^z yg(y)dy =$$

$$= G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(y)dy = G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)dy.$$

Доказательство

- $\Pi(b, x) = G(z)(x - z) + \int_0^z G(y)dy$.
- То есть получится, что

$$\Pi(\beta(x), x) - \Pi(\beta(z), x) = G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy \geq 0$$

вне зависимости от z (т.к. G неубывает).

- Вот и доказали оптимальность.

Переформулировка

- Можно переписать β в виде, в котором будет очевидно, что участникам надо ставить меньше их ценности:

$$\beta(x) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy.$$

Упражнение. Докажите это!

Обсуждение

$$\beta(x) = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy.$$

- Т.к. $\frac{G(y)}{G(x)} = \left(\frac{F(y)}{F(x)}\right)^{N-1}$, видно, что чем больше участников, тем ближе нужно ставить к своей истинной ценности.

Пример

- Предположим, что ценности распределены равномерно на $[0,1]$.
- Тогда $F(x) = x$, $G(x) = x^{N-1}$, и

$$\beta(x) = \frac{N-1}{N}x.$$

Упражнение. Докажите это.

Разница между двумя аукционами

- В second-price аукционе все говорят свои настоящие ценности — но получают вещь за меньшую цену, за цену второго сверху участника.
- В first-price аукционе каждый платит сколько сказал — но все говорят меньше, чем истинная стоимость.
- Что же выгоднее для продавца?

Second-price

- В second-price аукционе всё понятно — продавец получает ожидаемую стоимость второго участника:

$$\mathbf{E}[\mathrm{Revenue}] = \mathbf{E}[Y_2].$$

First-price

- Для first-price аукциона

$$
\mathbf{E}[\mathrm{Revenue}] = \int_0^w \mathrm{Revenue}(x) f(x) dx =
$$
$$
= \int_0^w Nm(x) f(x) dx = N \int_0^w \left(\int_0^x y G'(y) dy \right) f(x) dx =
$$
$$
= N \int_0^w \left(\int_y^w f(x) dx \right) y g(y) dy = N \int_0^\omega y (1 - F(y)) g(y) dy,
$$

где $m(x)$ — ожидаемая выплата одного участника.

First-price

$$\mathbf{E}[\text{Revenue}] = N\int_0^{\omega} y(1-F(y))g(y)dy.$$

Упражнение. Докажите (или вспомните, как доказывалось), что

$$\mathbf{E}[Y_2] = \int_0^{\omega} y(1-F(y))g(y)dy.$$

Итоги

- Оказывается, что ожидаемый доход продавца в обоих аукционах одинаков!
- Но в конкретных случаях цены могут сильно различаться.

Упражнение. Найдите, при каких ценностях двух участников с априори равномерно распределёнными скрытыми ценностями продавцу выгоднее first-price аукцион, а при каких — second-price.

Outline

Механизмы

- Вспомним определение механизма.

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *состоит из набора стратегий* Σ_i *для каждого агента и функции исходов* $g : \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N \to \mathcal{O}$, *которая определяет исход, предусмотренный механизмом для данного профиля стратегий* $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_N)$.

Механизмы в контексте аукционов: ставки

- В контексте аукционов можно конкретизировать общие понятия *стратегии* и *функции исходов*.
- Теперь у агентов будут вместо множеств стратегий Σ_i множества возможных *ставок* $\mathcal{B}_i$.
- Каждый агент должен сделать ставку $b_i \in \mathcal{B}_i$; итого получится вектор ставок $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_N) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \ldots \times \mathcal{B}_N$.

Механизмы в контексте аукционов: размещение и платежи

- Можно конкретизировать и понятие *функции исходов*. Она разделится на две функции.
- *Правило размещения* (allocation rule) $\pi : \mathcal{B} \to \Delta$ определяет, кому достанется предмет (Δ — множество распределений вероятностей над множеством агентов).
- $\pi_i(\mathbf{b})$ — вероятность того, что i-й агент при таких ставках получит предмет.

Механизмы в контексте аукционов: размещение и платежи

- Можно конкретизировать и понятие *функции исходов*. Она разделится на две функции.
- *Правило платежей* (payment rule) $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^N$ определяет, сколько каждый агент должен будет заплатить.
- $\mu_i(\mathbf{b})$ — цена, которую должен заплатить i-й агент по итогам аукциона.

Механизмы в контексте аукционов: размещение и платежи

- Например, для first-price аукциона

$$\mu_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} b_i, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- А для second-price

$$\mu_i(\mathbf{b}) = \begin{cases} \max_{j \neq i} b_j, & \text{если } b_i > \max_{j \neq i} b_j, \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- Правило размещения будет одинаковым: $\pi_i(\mathbf{b}) = 1$, если $b_i > \max_{j \neq i} b_j$, и 0 в противном случае (с точностью до ничьих).

Механизмы в контексте аукционов: размещение и платежи

- Стратегии в этом контексте тоже немного конкретизируются; теперь стратегии — это функции $\beta_i : [0, \omega_i] \to \mathcal{B}_i$, где ω_i — максимальная возможная для i-го агента стоимость (возможно, $\omega_i = \infty$).
- Равновесие стратегий $(\beta_1, \dots, \beta_N)$ достигается, если для каждого i и каждого x_i отклонение от стратегии β_i уменьшает ожидаемый выигрыш i-го агента:

$$\mathbf{E}[m(\beta_i'(x_i))] \leq \mathbf{E}[m(\beta_i(x_i))],$$

где вероятность берётся по распределениям X_j других агентов, придерживающихся стратегии β_j.

Прямые механизмы

- Мы никак не ограничивали множество стратегий Σ (для аукционов — множество ставок $\mathcal{B}$): в принципе, протокол мог бы быть довольно сложным.
- Однако вполне достаточно рассматривать *прямые* (direct, direct revelation) механизмы, в которых у каждого агента просто спрашивают его тип, т.е. $\Sigma_i = \theta_i$ (в случае аукционов — его истинную стоимость x_i).
- Но, как мы уже выясняли, агенты могут нам врать.

Правдивые и неправдивые механизмы

- Вспомним определение того, что механизм реализует социальную функцию.

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$, *если для всех* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$

$$g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$ *находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной* $\mathcal{M}$.

Правдивые и неправдивые механизмы

- Теперь модифицируем его так, чтобы механизм был правдивым.

Определение

Прямой механизм $\mathcal{M} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, g)$ *реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$, *если для всех* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$

$$g(\theta_1, \ldots, \theta_N) = f(\theta),$$

где профиль стратегий $(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ *находится в равновесии по отношению к игре, индуцированной* $\mathcal{M}$.

Реализация правдивым механизмом

- Можно и ещё проще, там ведь просто получалось, что $g = f$.

Определение

Функция социального выбора $f(\theta)$ правдиво реализуема (truthfully implementable, incentive compatible), если профиль стратегий $(s_1^*, \dots, s_N^*)$, где $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$, находится в равновесии в игре, индуцированной прямым механизмом $\mathcal{M} = (\theta_1, \dots, \theta_N, f)$.

Правдивые механизмы

- Конечно, было бы здорово, чтобы можно было реализовывать всё на свете правдивыми механизмами.
- Тогда агентам не надо было бы думать, а «центр» мог бы твёрдо узнать их типы.
- Да и просто ограничиться правдивыми механизмами в анализе было бы очень заманчиво, ведь это гораздо более узкий класс.
- (На самом деле думать всё равно надо: агенты должны понимать, что механизм правдивый.)

Принцип выявления доходности

- К счастью, всё так и есть!
- Майерсон доказал *принцип выявления доходности*, который гарантирует, что если какую-то социальную функцию можно реализовать, её можно и правдиво реализовать.
- Как вы думаете, как это можно доказать? Hint: это *очень* просто. :)

Вспомним определения

Определение

Стратегия s_i называется доминантной, если она (слабо) максимизирует ожидаемую прибыль агента для всех возможных стратегий других агентов:

$$\forall s_i' \neq s_i, \mathrm{s}_{-i} \in \Sigma_{-i} \quad u_i(s_i, \mathrm{s}_{-i}, \theta_i) \geq u_i(s_i', \mathrm{s}_{-i}, \theta_i).$$

Вспомним определения

Определение

Механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ *реализует функцию социального выбора* $f(\theta)$ *в доминантных стратегиях, если для всех* $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_N) \in \Theta_1 \times \ldots \times \Theta_N$

$$g(s_1^*(\theta_1), \ldots, s_N^*(\theta_N)) = f(\theta),$$

и каждая из стратегий s_i^* *является доминантной для агента* i.

Вспомним определения

- Можно ещё совместить определения правдивой реализуемости и доминантных стратегий.

Определение

Функция социального выбора $f(\theta)$ правдиво реализуема в доминантных стратегиях (truthfully implementable in dominant strategies, dominant strategy incentive compatible, strategy-proof, straightforward), если профиль стратегий $(s_1^*, \ldots, s_N^*)$, где $s_i^*(\theta_i) = \theta_i$, находится в равновесии доминантных стратегий в игре, индуцированной прямым механизмом $\mathcal{M} = (\theta_1, \ldots, \theta_N, f)$, т.е. $\forall \theta_i, \theta_i' \in \theta_i$, $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

Чем хороши доминантные стратегии

- Во-первых, можно быть более–менее уверенным, что агент изберёт доминантную стратегию: она не зависит от его прогнозов на действия других агентов.
- Во-вторых, по этой же причине можно отказаться от предположений на распределение типов у агентов (помните, было у нас $F(\theta)$?) и вообще это самое $F(\theta)$ не рассматривать. Что приятно.

Принцип выявления доходности для доминантных стратегий

Теорема

Пусть для данной социальной функции f существует механизм $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$, который её реализует в доминантных стратегиях. Тогда f правдиво реализуема в доминантных стратегиях.

Доказательство

- $\mathcal{M} = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N, g)$ реализует f, значит, есть профиль стратегий $\mathbf{s}^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$, для которого $\forall \theta$ $g(s_i^*(\theta)) = f(\theta)$, и $\forall i, \theta_i, s_i', \mathbf{s}_{-i}$

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s_i', \mathbf{s}_{-i}), \theta_i).$$

- В частности (подставим конкретное s' и $\mathbf{s}_{-i}$), $\forall i, \theta_i$

$$u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}), \theta_i) \geq u_i(g(s_i^*(\theta_i), \mathbf{s}_{-i}^*(\theta_{-i})), \theta_i).$$

- Но это значит, что (т.к. $g(s_i^*(\theta)) = f(\theta)$) $\forall i, \theta_i$

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

- А это в точности определение правдивой реализуемости. $\square$

Интуиция

- Интуитивно это очень простая конструкция.
- Пусть есть механизм, в котором агенты находятся в равновесии, но при этом врут — показывают не свои типы, а другие, $s_i^*(\theta_i)$.
- Давайте тогда рассмотрим такой же механизм, но с дополнительными «посредниками» для каждого агента.
- Мол, ты мне свой тип θ_i скажешь, а я за тебя в прошлом механизме ставку сделаю на $s_i^*(\theta_i)$.
- Очевидно, в такой ситуации врать выгодно уже быть не может.

В других контекстах

- Конечно, эта теорема верна не только для доминантных стратегий.
- Совершенно то же рассуждение так же работает и для равновесий Нэша, и для равновесий по Байесу-Нэшу.
- Мы будем им пользоваться, когда дойдёт дело до тех контекстов.

Неравенства

- Вспомним определение правдивой реализуемости:

$$u_i(f(\theta_i, \theta_{-i}), \theta_i) \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i).$$

- Рассмотрим агента i и любую пару возможных типов θ_i' и θ_i''. Если правдивость — доминантная стратегия, то $\forall \theta_{-i} \in \Theta_{-i}$

$$u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i') \geq u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'') \text{ и}$$

$$u_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'') \geq u_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i').$$

Свойство слабого обращения преференций

- Т.е. предпочтения агента i в смысле ранжирования $f(\theta_i', \theta_{-i})$ и $f(\theta_i'', \theta_{-i})$ должны измениться, когда его тип меняется с θ' на θ'' или обратно.
- Это называется *свойство слабого обращения преференций* (weak preference reversal property).

Свойство слабого обращения преференций

- Верно и обратное: если свойство слабого обращения преференций выполняется для всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ и для всех пар $\theta', \theta'' \in \Theta_i$, то говорить правду — доминантная стратегия для агента i.

Упражнение. Докажите это.

Множества нижних контуров

- Всё это можно переформулировать в терминах так называемых множеств нижних контуров.
- *Множество нижнего контура* (lower contour set) возможного исхода o при агенте i типа θ_i — это

$$L_i(o,\theta_i) = \{o' \in \mathcal{O} : u_i(o,\theta_i) \geq u_i(o',\theta_i)\}.$$

Множества нижних контуров

Теорема

Социальная функция f правдиво реализуема в доминантных стратегиях тогда и только тогда, когда для всех i, всех $\theta_{-i} \in \Theta_{-i}$ и всех пар типов агента i $\theta', \theta'' \in \Theta_i$ верно

$$f(\theta_i''\theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i', \theta_{-i}), \theta_i'), \quad f(\theta_i'\theta_{-i}) \in L_i(f(\theta_i'', \theta_{-i}), \theta_i'').$$

Outline

Аукционы

- Сейчас мы опять будем в ситуации аукционов.
- N покупателей, у каждого ценность x_i, которая накидывается случайной величиной X_i, распределённой по $F(x)$.
- В аукционе A агент i платит $m_i^A(x_i)$.
- Есть ещё $G(x) = F(x)^{N-1}$ — первый момент $N-1$ агента.

Стандартные аукционы

- Мы ограничимся *стандартными аукционами*, в которых вещь достаётся тому, кто больше всех предложил.
- При этом конечно, то, сколько он в действительности заплатит, зависит от формы аукциона.
- Пример нестандартного аукциона — лотерея; платят все, потом приз получают пропорционально потраченной сумме.

Ожидаемые выплаты

- Рассмотрим некий стандартный аукцион A; у него есть равновесие.
- В этом равновесии агент i ожидает выплатить $m_i^A(x_i)$.
- Агенты у нас будут одинаковы, поэтому m^A не зависит от i.
- Предположим, кроме того, что участник со ставкой 0 платит 0 (начальное условие).

Формулировка

Теорема

Пусть скрытые значения агентов x_i распределены независимо и одинаково, и все агенты нейтральны к риску. Тогда любое симметричное равновесие любого стандартного аукциона, такое, что ожидаемая выплата агента со ставкой 0 равна нулю, даёт один и тот же ожидаемый доход продавцу.

Суть

- Иначе говоря, какой бы аукцион мы ни устраивали, при этих условиях (одинаковых агентах) нас ждёт в среднем совершенно одинаковая прибыль!
- Звучит очень странно, но сейчас докажем.

Доказательство

- Рассмотрим первого агента; остальные следуют равновесной стратегии β, а он ставит $\beta(z)$.
- Он выигрывает, когда его ставка $\beta(z)$ превышает самую большую из других ставок $\beta(Y_1)$, т.е. когда $z > Y_1$.
- Его ожидаемая выплата равна

$$\Pi^A(z, x) = G(z)x - m^A(z),$$

где $G(z) = F(z)^{N-1}$ (распределение Y_1).

Доказательство

- Его ожидаемая выплата равна

$$\Pi^A(z,x) = G(z)x - m^A(z),$$

где $G(z) = F(z)^{N-1}$ (распределение Y_1).

- Тут главное в том, что его $m^A(z)$ зависит от β и от z, но не зависит от его настоящего значения x.
- Давайте теперь максимизировать выплату; получается условие:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z,x) = g(z)x - \frac{d}{dz}m^A(z) = 0.$$

Доказательство

- Поскольку в равновесии выгодно ставить $\beta(x)$, то, значит:

$$\frac{d}{dz}m^A(y) = g(y)y,$$

-

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = \\ = G(x) \times \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x].$$

Доказательство

- $$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy = \\ = G(x) \times \mathbf{E}[Y_1 | Y_1 < x].$$
- Вот и получилось, что ожидаемая выплата агента не зависит от A, а только от распределения на x! $\square$

Пример

- Пусть для примера скрытые значения агентов x_i распределены равномерно на $[0, 1]$.
- Тогда $F(x) = x$, $G(x) = x^{N-1}$, и из теоремы получается, что

$$m^A(x) = \frac{N-1}{N} x^N,$$

$$\mathbf{E}[m^A(x)] = \frac{N-1}{N(N+1)}.$$

- А ожидаемый доход продавца — это $N\mathbf{E}[m^A(x)]$:

$$\mathbf{E}[R^A] = \frac{N-1}{N+1}.$$

Ещё раз итог

- Мы получили не только факт: «ожидаемая выплата не зависит от аукциона».
- Мы ещё и получили конкретную формулу для этой выплаты:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy,$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$

- Обычно $m^A(0) = 0$.

Ещё раз итог

- Как известно (правда, я не знаю, кто это сказал), «theorems come and go, a good formula remains for ever».

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x y g(y) dy,$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$

- Пользоваться мы будем в основном именно формулой, а не просто общим фактом.

Ещё раз итог

- И ещё важное замечание. Мы получили формулу, которая говорит: «если равновесие есть, то оно есть именно тут»:

$$m^A(x) = m^A(0) + \int_0^x y g(y) dy,$$

$$g(x) = G'(x) = (F(x)^{N-1})' = (N-1)f(x)F(x)^{N-2}.$$

- Но это не значит автоматически, что равновесие есть! Это придётся проверять отдельно, и не везде оно присутствует.

All-pay auction

- Давайте рассмотрим аукцион, где все делают ставки, потом *все платят*, сколько поставили, а потом вещь дают тому, кто заплатил больше.
- Бывает ли такое в жизни? Можете придумать пример, когда люди идут на такую схему по доброй воле? :)

All-pay auction

- Давайте рассмотрим аукцион, где все делают ставки, потом *все платят*, сколько поставили, а потом вещь дают тому, кто заплатил больше.
- Бывает ли такое в жизни? Можете придумать пример, когда люди идут на такую схему по доброй воле? :)
- Например, лоббирование.

Равновесие в all-pay аукционе

- В таком аукционе ожидаемая выплата *строго равна* ставке. Поэтому если равновесие есть, оно должно быть тут:

$$m^{\mathrm{all-pay}}(x) = \int_0^x yg(y)dy = \beta^{\mathrm{all-pay}}(x).$$

- Проверим, что это действительно равновесие (по Нэшу хотя бы). Пусть все играют по $\beta^{\mathrm{all-pay}}$, а один ставит z. Тогда он получит

$$G(z)x - \beta(z) = G(z)x - \int_0^z g(y)dy = G(z)(x-z) + \int_0^z G(y)dy.$$

- Это мы уже где-то видели... когда рассматривали аукцион первой цены. Значит, и тут равновесие будет.

Аукцион третьей цены

- А вот ещё экзотическая схема: аукцион третьей цены.
- Ставишь, если поставил больше всех, платишь третью сверху ставку.
- Мы его разберём для примера, заодно статистику вспомним.

Ожидаемые выплаты

- Во-первых, наша формула говорит, что
$$m^{\mathrm{III}}(x)=\int_0^x yg(y)dy.$$
- С другой стороны, ожидаемая выплата — это значит, что когда $Y_1 < x$, игрок платит $\beta^{\mathrm{III}}(Y_2)$, где Y_2 — вторая сверху цена из других $N-1$.
- Схема дальнейших действий: получим ту формулу, приравняем этой, потом из них выведем β^{III}.

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?
- Событие $Y_2 < y$ — это объединение двух непересекающихся событий:
  - все X_k меньше y;
  - $n-1$ из X_k меньше y, а один X_k больше y.

Порядковые статистики

- Рассмотрим распределение F с плотностью $f = F'$.
- Какова плотность второй порядковой статистики Y_2 в выборке из n элементов?
- Итого получается

$$F_2^{(n)}(y) = F(y)^n + nF(y)^{n-1}(1-F(y)) = nF(y)^{n-1} - (n-1)F(y)^n.$$

- А плотность

$$f_2^{(n)}(y) = n(n-1)(1-F(y))F(y)^{n-2}f(y).$$

Условные порядковые статистики

- Нас ещё интересуют условные вероятности. Сначала — совместная вероятность:

$$f^{(n)}_{\mathbf{Y}}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n).$$

Упражнение. Докажите, что из этого следует, что совместная вероятность первой и второй порядковых статистик

$$f^{(n)}_{1,2}(y_1, y_2) = n(n-1) f(y_1) f(y_2) F(y_2)^{n-2}.$$

Условные порядковые статистики

- Теперь можно и условную вывести:

$$f_2^{(n)}\left(z \mid Y_1^{(n)} = y\right) = \frac{f_{1,2}^{(n)}(y,z)}{f_1^{(n)}(y)} =$$
$$= \frac{n(n-1)f(y)f(z)F(z)^{n-2}}{nf(y)F(y)^{n-1}} = \frac{(n-1)f(z)F(z)^{n-2}}{F(y)^{n-1}}.$$

Условные порядковые статистики

- Но нам нужна немножко другая формула.

Упражнение. Докажите, что условная вероятность второй порядковой статистики при условии первой

$$f_2^{(n)}\left(y \mid Y_1^{(n)} < x\right) = \frac{n(F(x) - F(y))f_1^{(n-1)}(y)}{F_1^{(n)}(x)}.$$

Возвращаясь к выплатам

- Итак, мы тут вспомнили, что

$$f_2^{(N-1)}(y \mid Y_1 < x) = \frac{(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)}{F_1^{(N-1)}(x)}.$$

- Тогда ожидаемая выплата будет вот какая:

$$m^{\mathrm{III}}(x) = F_1^{(N-1)}(x)\mathbf{E}\left[\beta^{\mathrm{III}}(Y_2) \mid Y_1 < x\right] = \\ = \int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy.$$

Вывод оптимальной стратегии

- Приравняем это тому, что из теоремы получалось:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)(N-1)(F(x)-F(y))f_1^{(N-2)}(y)dy = \int_0^x yg(y)dy.$$

- Продифференцируем по x:

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = xg(x),$$

$$(N-1)f(x)\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y)f_1^{(N-2)}(y)dy = (N-1)xf(x)F(x)^{N-2}.$$

Вывод оптимальной стратегии

- Т.к. $F_1^{N-2}(x) = F(x)^{N-2}$, получается:

$$\int_0^x \beta^{\mathrm{III}}(y) f_1^{(N-2)}(y) dy = x F_1^{N-2}(x).$$

- Ещё разик продифференцируем по x:

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) f_1^{(N-2)}(x) = x f_1^{N-2}(x) + F_1^{N-2}(x),$$

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F_1^{N-2}(x)}{f_1^{N-2}(x)} = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

Уфффф + ложка дёгтя

- Итак, уфффф, получилось:

$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$

- Ложка дёгтя: это всё верно, только когда β возрастает; а для этого, как видно, надо, чтобы F/f возрастало.
- То есть $\ln F$ должен быть вогнутой функцией (говорят, что F log-вогнута, log-concave).

Забавное свойство

- Стратегия:
$$\beta^{\mathrm{III}}(x) = x + \frac{F(x)}{(N-2)f(x)}.$$
- У неё есть забавное свойство: $\beta^{\mathrm{III}}(x)$ всегда строго больше x.
- То есть агенту оптимально ставить *строго больше*, чем своё скрытое значение.
- Ну что ж, такой уж аукцион нам попался, всякое бывает.

Прямые механизмы в контексте аукционов

- Рассмотрим прямой механизм.
- В нём у участников просто спрашивают их скрытую стоимость: $\Theta = \mathcal{X}$.

Прямые механизмы в контексте аукционов

- То есть его можно рассматривать как два правила:
  - *правило распределения* (allocation rule) $\mathbf{Q} = (Q_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{Q_N}(\mathbf{x}))$ определяет вероятность, что агент i получит объект;
  - *правило выплаты* (payment rule) $\mathbf{M} = (M_1(\mathbf{x}), \dots, M_N(\mathbf{x}))$ определяет ожидаемую выплату агента i.
- Множество исходов — это множество пар $\mathcal{O} = \{(\mathbf{Q}(\mathbf{x}), \mathbf{M}(\mathbf{x})) \mid \mathbf{x}\}$.

Обозначения

- Обозначим через $q_i(z_i)$ ожидаемую доходность агента i, когда он говорит z_i, а остальные говорят правду:

$$q_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} Q_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) \mathbf{dx}_{-i}.$$

- А через $m_i(z_i)$ — его ожидаемую выплату:

$$m_i(z_i) = \int_{\mathcal{X}_{-i}} M_i(z_i, \mathbf{x}_{-i}) f_{-i}(\mathbf{x}_{-i}) \mathbf{dx}_{-i}.$$

Ожидаемый доход

- Ожидаемый доход агента i, если он говорит z_i, тогда получается как
$$q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

Правдивый механизм

Определение

Прямой механизм $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ *называется правдивым (в этом контексте — incentive compatible), если* $\forall i \ \forall x_i, z_i$

$$U_i(x_i) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i) \geq q_i(z_i)x_i - m_i(z_i).$$

$U_i(x_i)$ *называется равновесной функцией дохода.*

Следствия из правдивости

- Оказывается, что уже свойства правдивости достаточно для того, чтобы вывести массу интересного.
- Сейчас мы этим займёмся.

Выпуклость

- Во-первых, совсем очевидно: из правдивости следует, что

$$U_i(x_i) = \max_{z_i}\{q_i(z_i)x_i - m_i(z_i)\}.$$

- А максимум аффинных функций — выпуклая функция.
- Значит, U_i выпукла.

Неубывание q_i

- Дальше:

$$q_i(x_i)z_i - m_i(x_i) = U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i), \text{ значит,}$$

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

- Выпуклая функция абсолютно непрерывна и, следовательно, дифференцируема почти всюду в своей области определения.
- Значит, $U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ почти всюду. А т.к. U_i выпуклая, то, значит, q_i неубывает.

Неубывание q_i

- Значит, $U_i'(x_i) = q_i(x_i)$ почти всюду. А т.к. U_i выпуклая, то, значит, q_i неубывает.
- Проще говоря, если больше предложите, вероятность получить вещь не уменьшится.
- Это вполне естественно, но неочевидно, что вдруг будет следовать прямо из правдивости.

Формула для ожидаемого дохода

- Поскольку абсолютно непрерывная функция представляет собой интеграл от своей производной:

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i.$$

- Мы получили, что форма ожидаемого дохода агента зависит только от правила распределения, но не от правила выплаты.
- Правило выплаты определяет только $U_i(0)$.
- Это называется payoff equivalence.

Опять про неубывание q_i

- Само неубывание q_i было вполне естественно. Но вот что уж совсем неожиданно...

$$U_i(z_i) \geq U_i(x_i) + q_i(x_i)(z_i - x_i),$$

$$U_i(x_i) = U_i(0) + \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i, \text{ значит,}$$

$$\int_{x_i}^{z_i} q_i(t_i)dt_i \geq q_i(x_i)(z_i - x_i).$$

- Если q_i неубывает, то это неравенство верно.
- Значит, из неубывания q_i *следует* правдивость механизма.

И снова эквивалентность доходности

- Из вышепомянутой формулы опять, как ни странно, следует теорема об эквивалентности доходности, нужно только вспомнить, что $U_i(x) = q_i(x_i)x_i - m_i(x_i)$ и $U_i(0) = -m_i(0)$.

Теорема

Если прямой механизм $(\mathbf{Q}, \mathbf{M})$ правдив, то для всех i и x_i ожидаемая выплата равна

$$m_i(x_i) = m_i(0) + q_i(x_i)x_i - \int_0^{x_i} q_i(t_i)dt_i,$$

и это означает, что ожидаемая выплата агента с точностью до константы зависит только от правила распределения.

Обсуждение

- Это обобщает наш предыдущий результат: теперь агенты могут быть несимметричными, и правила распределения тоже могут различаться.
- Предыдущая теорема получается как частный случай, потому что если агенты симметричны, есть неубывающая равновесная стратегия, и объект распределяется покупателю с наивысшей ставкой, то правила распределения у них у всех совпадают (зависят только от распределения F).

Обсуждение

- Revenue equivalence theorem — очень мощный инструмент. Она нам ещё не раз пригодится.
- Но дальше... «пора поговорить о дряни».

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage: http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам: sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com
- Заходите в ЖЖ smartnik.