

Worst-case дизайн и приближённая оптимальность

Сергей Николенко

Теория экономических механизмов — ИТМО, весна 2008

Outline

- 1 Оптимальность в худшем случае: определения
 - Продажа цифрового товара
 - Оптимальность и приближённая оптимальность
 - Бенчмарка $F^{(2)}$
- 2 Приближаемся к $F^{(2)}$
 - Примеры и DOP
 - Детерминированные симметрические аукционы
 - RSOP

Постановка

- Пусть у нас есть некая вещь и N агентов, которые хотят её купить.
- У агентов есть свои цены x_j .
- Но у нас теперь есть N копий вещи, так что мы можем хоть каждому агенту продать.
- Так происходит с цифровыми товарами, которые можно копировать.

Оптимальный алгоритм

- Конечно, самый правильный механизм — это раздать всем бесплатно и попросить donations. :)
- Но мы сейчас побудем злым Диснеем или кто там ещё.

Оптимальный алгоритм

- В принципе, совсем оптимальный алгоритм продал бы просто всем по их стоимостям:

$$\text{Revenue} = \mathcal{T}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N x_i.$$

- Но это типа нечестно: победители платят разные цены.
- Надо всё-таки честно продавать, а то пацаны не поймут.
- Какой тогда будет оптимальный алгоритм?

Оптимальный алгоритм

- Правильно, выбрать цену, которая максимизирует доход:

$$\text{Revenue} = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = \max_p p \times \{\text{к-во участников с } x_i \geq p\}.$$

- Введём обозначение: $x_{(i)}$ — это i -я по величине ценность (например, $x_{(1)} = \max_i x_i$).
- Тогда

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \max_i ix_{(i)}.$$

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

- С одной стороны, очевидно, что

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{T}(\mathbf{x}).$$

- $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ вообще самый максимум, что только бывает.
- А что в другую сторону?

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

Теорема

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}_N \mathcal{F}(\mathbf{x}), \quad \text{где } \mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^N \frac{1}{i}.$$

Эта оценка точна (равенство реализуется).

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

- Давайте докажем. $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \max_i ix_{(i)}$. Значит,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_{(i)} = \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{ix_{(i)}}{i} \leq \sum_{i=1}^N \frac{\mathcal{F}(\mathbf{x})}{i} = \mathcal{H}_N \mathcal{F}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

$\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$

- А пример, реализующий оценку, нам ещё пригодится потом. Рассмотрим $x_i = \frac{1}{i}$.
- Это называется *вход равного дохода*, потому что $ix_{(i)} = 1 = \mathcal{F}(\mathbf{x})$ для всех i .
- Очевидно, что $\mathcal{T}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_N$ в данном случае.

Оптимальность в худшем случае

- Мы сегодня от теории игр немного отвлечёмся и будем рассматривать дело в контексте скорее теоретической информатики.
- Вместо равновесий и алгоритмов, оптимальных в ожидании по распределениям, у нас теперь будет оптимальность в худшем случае.
- Иначе говоря, механизм оптимален, если он оптимально действует на каждом входе x .

Неоптимальность

- Очевидно, ничего подобного быть не может.

Упражнение. Постройте такие примеры, что один и тот же аукцион никак не сможет быть оптимальным на каждом из них.
Hint: достаточно одного агента.

Что же делать

- Что же делать?

Что же делать

- Что же делать?
- Будем делать то, что всегда делают в информатике: рассматривать субоптимальные решения и вводить какую-нибудь меру оптимальности.
- А потом мучительно доказывать, что бывают x -оптимальные механизмы, но не бывает y -оптимальных относительно меры z ... :)

Бенчмарки

- *Бенчмарка прибыли* (profit benchmark) — это некоторая функция $\mathcal{G} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, которая отображает вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ в желаемую прибыль.
- Бенчмарка не обязательно должна быть совсем максимальной прибылью, полезно с разными функциями сравнивать.
- Мы уже две бенчмарки видели — это $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$.

Степень оптимальности

Определение

Степень оптимальности аукциона \mathcal{A} относительно бенчмарки \mathcal{G} — это $\beta = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathcal{G}(\mathbf{x})}{\mathcal{A}(\mathbf{x})}$. Будем говорить в таком случае, что \mathcal{A} β -оптимален относительно \mathcal{G} .

Определение

Аукцион \mathcal{A} оптимален относительно бенчмарки \mathcal{G} , если у него максимальная степень оптимальности относительно \mathcal{G} среди всех аукционов.

Пример утверждения

- Из того, что мы уже говорили, следует такое утверждение.

Теорема

Для входов x , $x_i \in [1, h]$, ни для какого N не существует аукциона, $o(\log h)$ -оптимального относительно $T(x)$.

Упражнение. Докажите это.

Следствие

- Но из этого ещё и интересное следствие следует.
- При $N = 2$ разница между $\mathcal{T}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ константна:
$$\mathcal{F}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{T}(\mathbf{x})/2.$$

Следствие

При $N = 2$ для входов $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $x_i \in [1, h]$, не существует аукциона, $o(\log h)$ -оптимального относительно $\mathcal{T}(\mathbf{x})$.

Что же делать

- Это следствие значит, что мы не можем одного агента с максимальным x ; заставить заплатить константную долю своей ценности. Действительно не можем.
- Получается, что и к $\mathcal{F}(x)$ мы не приблизимся толком.
- Что же делать? Какую же выбрать бенчмарку, чтобы к ней можно было приблизиться?
- Как ни странно, всё начнёт работать, как только мы откажемся иметь дело с *одним* максимальным агентом.

$F^{(2)}$

- Обозначим через $F^{(2)}$ оптимальную прибыль с по крайней мере двумя победителями по одной и той же цене:

$$F^{(2)}(\mathbf{x}) = \max_{i \geq 2} ix_{(i)}.$$

- Тогда получится, что для β -оптимального относительно $F^{(2)}$ аукциона \mathcal{A} для малой константы β

$$T(\mathbf{x}) \geq \mathcal{F}(\mathbf{x}) \approx F^{(2)}(\mathbf{x}) \geq \mathcal{A}(\mathbf{x}) \geq \frac{F^{(2)}(\mathbf{x})}{\beta} \geq \frac{T(\mathbf{x})}{\beta \log n}.$$

Outline

- 1 Оптимальность в худшем случае: определения
 - Продажа цифрового товара
 - Оптимальность и приближённая оптимальность
 - Бенчмарка $F^{(2)}$
- 2 Приближаемся к $F^{(2)}$
 - Примеры и DOP
 - Детерминированные симметрические аукционы
 - RSOP

Пример I

- Отныне мы будем пытаться соорудить аукцион, который был бы β -оптимальным относительно $F^{(2)}$.
- Первые примеры покажут, что оптимальная цена продажи зависит от конкретного вектора x .

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 50 ставок по \$10 и
 - 50 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- Какие будут R_1 и R_{10} ?

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 50 ставок по \$10 и
 - 50 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- $R_{10} = 500$, $R_1 = 100$ (все выиграют и заплатят по \$1).
- Ясно, что $F^{(2)}(\mathbf{x}) = R_{10} = \500 .

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 5 ставок по \$10 и
 - 95 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- Какие будут R_1 и R_{10} ?

Пример I

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 5 ставок по \$10 и
 - 95 ставок по \$1.
- Мы хотели бы сравнить доходы R_1 и R_{10} от цен \$1 и \$10 соответственно.
- $R_{10} = 50$, $R_1 = 100$.
- Ясно, что $F^{(2)}(\mathbf{x}) = R_1 = \100 .

Оптимальная цена

- Очевидно, для каждого вектора x есть цена, на которой механизм достигает оптимума.

Определение

Оптимальная цена для вектора ценностей x — это

$$\text{opt}(x) = \operatorname{argmax}_p \{p \times \text{“к-во агентов с } v_i \geq p\text{”}\}.$$

Детерминированный аукцион оптимальной цены

- Мы уже отмечали, что всякий правдивый аукцион описывается ценой, которую предлагают агенту i , причём она не зависит от его собственной ценности, т.е. это функция $t_i(\mathbf{b}_{-i})$.
- Так что вполне естественно было бы предложить такую идею аукциона: давать каждому цену

$$t_i(\mathbf{b}_{-i}) = \text{opt}(\mathbf{b}_{-i}).$$

- Это называется *детерминированный аукцион оптимальной цены* (Deterministic Optimal Price auction, DOP).

Свойства DOP

- Во-первых, по определению DOP правдив.
- Но насколько он хорош? Будет ли он β -оптимален относительно $F^{(2)}$?

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 10 ставок по \$10 и
 - 90 ставок по \$1.
- Какие цены предложит DOP?

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 10 ставок по \$10 и
 - 90 ставок по \$1.
- \mathbf{b}_{-1} — это вектор из 89 ставок по \$1 и 10 ставок по \$10, поэтому $\text{opt}(\mathbf{b}_{-1}) = \10 .
- \mathbf{b}_{-10} — это вектор из 90 ставок по \$1 и 9 ставок по \$10, поэтому $\text{opt}(\mathbf{b}_{-10}) = \1 .

Пример II

- Рассмотрим ситуацию, когда у нас есть
 - 10 ставок по \$10 и
 - 90 ставок по \$1.
- Получается, что DOP принимает ставки по \$10, но даёт им цену \$1, а ставки по \$1 вообще отвергает.
- В результате прибыль равна \$10 вместо $F^{(2)} = 100$.
- Этот пример можно сделать и ещё хуже, для любой константы.

DOP не помогает

- В общем, DOP не особенно справляется.
- Что же делать?
- В случае детерминированных симметрических аукционов — ничего...

Теорема о невозможности

Теорема

Ни один детерминированный симметрический аукцион не является константно-оптимальным относительно $F^{(2)}$.

Доказательство

- Наша задача — для каждого детерминированного симметрического аукциона найти такую серию примеров, на которой он будет всё хуже и хуже относительно $F^{(2)}$.
- Будем рассматривать векторы ставок \mathbf{b} со ставками $b_i \in \{1, h\}$ (нам и таких хватит).
- Обозначим через $n_h(\mathbf{b})$ и $n_1(\mathbf{b})$ количества ставок h и 1 в нашем векторе.

Доказательство

- Обозначим через $n_h(\mathbf{b})$ и $n_1(\mathbf{b})$ количества ставок h и 1 в нашем векторе.
- Что значит, что аукцион \mathcal{A} симметрический?
- Это значит, что цена $t_i(\mathbf{b}_{-i})$ от i не зависит, и является только функцией от $n_h(\mathbf{b}_{-i})$ и $n_1(\mathbf{b}_{-i})$.
- Иначе говоря, цена — это функция $t(n_h, n_1)$; чтобы получить цену для каждого агента, нужно туда подставить $n_h(\mathbf{b}_{-i})$ и $n_1(\mathbf{b}_{-i})$.
- И, наконец, предположим, что $t(n_h, n_1) \in \{1, h\}$, потому что в остальных случаях прибыль (со ставками $b_i \in \{1, h\}$) будет никак не больше.

Доказательство

- Предположим, что аукцион константно-оптимальный.
- Какие должны быть для этого свойства функции $t(n_h, n_1)$?
- Во-первых, для всех m $t(m, 0) = h$, иначе мы на входе из всех h добудем прибыль только n , а оптимальный — $F^{(2)} = hn$.
- И будем мы h -оптимальными, а это не константа!

Доказательство

- Предположим, что аукцион константно-оптимальный.
- Какие должны быть для этого свойства функции $t(n_h, n_1)$?
- С другой стороны, для всех m $t(0, m) = 1$, иначе мы на входе из всех 1 вообще ничего не заработаем.
- А $F^{(2)} = n$, что куда больше. :)

Доказательство

- Рассмотрим теперь достаточно большое m и посмотрим на $t(k, m - k)$.
- Для $k = 0$ эта функция равна 1, для $k = m$ она равна h .
- Значит, где-то есть $k^* = \min\{k : t(k, m - k) = h\}$.
- Давайте его зафиксируем и рассмотрим вход из $m + 1$ ставки, где $n_h(\mathbf{b}) = k^*$, и $n_1(\mathbf{b}) = m - k^* + 1$.

Доказательство

- Тогда агентам, которые ставят 1, мы предложим $t(n_h(\mathbf{b}_{-1}), n_1(\mathbf{b}_{-1})) = t(k^*, m - k^*) = h$. И все агенты, ставившие 1, не принесут никакой прибыли.
- А агентам, которые ставят h , мы предложим $t(n_h(\mathbf{b}_{-h}), n_1(\mathbf{b}_{-h})) = t(k^* - 1, m - k^* + 1) = 1$. И они принесут прибыль k^* .
- Но тогда для, например, $h = n F^{(2)}(\mathbf{x}) = nk^*$, а наша прибыль — только k^* . Противоречие.

Что делать?

- Теорема — это, конечно, ужас.
- Но не ужас-ужас-ужас.
- Она запрещает *детерминированные симметрические* аукционы.
- Оказывается, что и вероятностные есть, и детерминированные несимметрические... мы сейчас один вероятностный рассмотрим.

RSOP

Определение

Вероятностный аукцион оптимальной цены (Random Sampling Optimal Price, RSOP) работает следующим образом.

- *Разделить случайно \mathbf{b} на две части, относя каждого агента к \mathbf{b}' или \mathbf{b}'' с вероятностью $\frac{1}{2}$.*
 - *Вычислить $t' = \text{opt}(\mathbf{b}')$ и $t'' = \text{opt}(\mathbf{b}'')$ — оптимальные цены для каждой из частей.*
 - *Предложить t' агентам из \mathbf{b}'' , а t'' — агентам из \mathbf{b}' .*
-
- Сразу отметим, что RSOP правдив, потому что цена есть функция от других ставок, не от ставки самого агента.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Для доказательства достаточно построить пример.
- Рассмотрим вектор ставок $\mathbf{b} = (\$1, \$2)$.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- С вероятностью $\frac{1}{2}$ обе ставки попадают в одну часть, и прибыль RSOP равна 0.
- В противном случае, $\mathbf{b}' = \{\$1\}$, $\mathbf{b}'' = \{\$2\}$, и $t' = \$1$, $t'' = \$2$.

Нижняя оценка

Теорема

RSOP не менее чем 4-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- То есть RSOP отвергнет ставку в \$1 и продаст ставке \$2 за \$1.
- Ожидание прибыли RSOP получается \$.50.
- А $F^{(2)}(\mathbf{b}) = \$2$. Значит, RSOP не менее чем 4-оптимален.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Мы делим \mathbf{b} на две части.
- Назовём ту, куда попал b_1 , *плохой*, а другую — *хорошей*.
- Предположим, что $b_1 \geq F^{(2)}(\mathbf{b})$ (увеличение b_1 может сделать только хуже).

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Обозначим $X_i \in \{0, 1\}$ случайную величину, индикатор того, что агент i на хорошей стороне.
- По определению, $X_1 = 0$.
- Обозначим $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$ количество агентов со ставкой $\geq b_i$ на хорошей стороне.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- S_i — это случайная величина, поведение которой можно описать случайным блужданием:
 - случайная величина S_i блуждает по прямой, начиная с 0 во время $i = 1$;
 - или движемся вправо, или остаёмся на месте в каждый момент с вероятностью $\frac{1}{2}$;
 - а случайная величина \mathcal{E}_α — это то, что для всех i $\frac{S_i}{i} \leq \alpha$;
 - нас будет особенно интересовать $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}$.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Обозначим i^* номер агента, чья ставка b_{i^*} максимизирует доход на хорошей стороне, т.е. $\forall j S_{i^*} b_{i^*} \geq S_j b_j$.
- Тогда доход RSOP можно описать как

$$\text{Rev} = (i^* - S_{i^*}) b_{i^*}.$$

- Мы хотим показать, что $\text{Rev} \geq \frac{F^{(2)}}{15}$.

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- $F^{(2)}$ получается из i' — номера ставки, которая оптимальна для всех, не только хорошей стороны, т.е. $i'b_{i'} \geq jb_j$.
- Ограничимся пока случаем, когда i' чётный.
- Рассмотрим случайное событие $\mathcal{B} = \{S_{i'} \geq \frac{i'}{2}\}$.
- i' чётный, значит, $\Pr[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}$ (\mathcal{B} — это когда большинство из i' наивысших ставок, кроме самой большой, на хорошей стороне).

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- Значит, оптимальная прибыль от хорошей стороны равна

$$S_{i^*} b_{i^*} \geq S_i b' \geq \frac{F^{(2)}}{2}.$$

- А в случае события $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}$ $S_i \leq \frac{3}{4}i$, и

$$(i - S_i)b_i \geq \frac{1}{4}ib_i \geq \frac{1}{3}S_i b_i.$$

Верхняя оценка

Теорема

RSOP не более чем 15-оптимален относительно $F^{(2)}$.

- В случае же $\mathcal{E}_{\frac{3}{4}} \cap \mathcal{B}$

$$\text{Rev} = (i^* - S_i) b_i \geq \frac{1}{3} S_{i^*} b_{i^*} \geq \frac{F^{(2)}}{6}, \text{ и}$$

$$\mathbf{E}[\text{Rev}] \geq \Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}} \cap \mathcal{B}] \frac{F^{(2)}}{6} \geq \frac{F^{(2)}}{15},$$

т.к. $\Pr[\mathcal{B}] = \frac{1}{2}$, а $\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] \geq 0.9$.

Лемма

- Нам осталось доказать, что $\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] \geq 0.9$.

Лемма

$$\Pr[\mathcal{E}_{\frac{3}{4}}] = 1 - \frac{1}{81} \left((17 + 3\sqrt{33})^{1/3} - 1 - 2(17 + 3\sqrt{33})^{-1/3} \right)^4.$$

Доказательство леммы

- Мы подсчитываем $\Pr[\mathcal{E}_\alpha]$. Рассмотрим $\alpha = \frac{k-1}{k}$ для целого k ($\frac{3}{4}$ подходят).
- Тогда условие $\frac{S_i}{i} \leq \alpha$ можно переписать как $(k-1)(i-S_i) - S_i \geq 0$.

Доказательство леммы

- Рассмотрим новое блуждание $Z_i = (k - 1)(i - S_i) - S_i$.
- Z_i на каждом шаге с вероятностью $\frac{1}{2}$ либо увеличивается на $(k - 1)$, либо уменьшается на 1; начинается он с $Z_1 = k - 1$.
- Теперь $\Pr[\mathcal{E}_\alpha]$ — это вероятность смерти (ruin) этого блуждания; обозначим через

$$p_j = \Pr [\exists i : Z_i = Z_1 - j].$$

Нас тогда интересует p_k (чтобы уйти ниже нуля).

Доказательство леммы

- Блуждание без памяти, уменьшается всегда на 1, поэтому $p_j = (p_1)^j$.
- А между p_1 и p_k есть зависимость:

$$p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_k = \frac{1}{2}(1 + p_1^k).$$

Доказательство леммы

- $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_k = \frac{1}{2}(1 + p_1^k)$.
- То есть p_1 — это некий корень многочлена $x^k - 2x + 1$ на отрезке $[0, 1]$.
- Кстати, почему корень на $(0, 1)$ существует и единственный?

Доказательство леммы

- Нам осталось только доказать, что $p_1 < 1$, потому что 1, конечно, тоже корень.
- Рассмотрим другое блуждание (Y_1, Y_2, \dots) , заданное как $Y_i = Z_i - k + 2$, причём если $Y_i = 0$, то оно там и останется.
- Так сказать, абсорбирующее блуждание.

Доказательство леммы

- И рассмотрим случайные переменные $W_i = r^{Y_i}$, где r — тот самый корень $x^k - 2x + 1$.
- Тогда (W_1, W_2, \dots) — это мартингал, т.е. $\mathbf{E}[W_{i+1}|W_i] = W_i$. Докажем это.
- Для $Y_i = 0$ это тривиально.
- Для $Y_i > 0$

$$\mathbf{E}[r^{Z_{i+1}}|Z_i] = \frac{1}{2}r^{Z_i-1} + \frac{1}{2}r^{Z_i+k-1} = \frac{1}{2}(r^{-1} + r^{k-1})r^{Z_i} = r^{Z_i}.$$

Доказательство леммы

- Поскольку (W_1, W_2, \dots) — это мартингал, получим, что

$$\mathbf{E}[W_t] = W_1 = r \quad \forall t \geq 1.$$

- Обозначим


$$p_{1,t} = \Pr[\exists i \leq t : Z_i = Z_1 - 1] = \Pr[W_t = 1].$$

- Обозначим \mathcal{A}_t событие $\{Z_t = Z_1 - 1 \text{ и } Z_s > Z_t, s < t\}$.

Доказательство леммы

- Тогда \mathcal{A}_t — непересекающиеся измеримые события,
 $p_{1,t} = \sum_{i=1}^t \Pr[\mathcal{A}_i]$, $p_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[\mathcal{A}_i]$.
- Значит, $p_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{1,t}$.
- Но $p_{1,t} = \Pr[W_t = 1] \leq \mathbf{E}[W_t] = r$. Значит, $p_1 \leq r < 1$, а,
значит, $p_1 = r$.

Спасибо за внимание!

- Lecture notes и слайды будут появляться на моей homepage:
`http://logic.pdmi.ras.ru/~sergey/index.php?page=teaching`
- Присылайте любые замечания, решения упражнений, новые численные примеры и прочее по адресам:
`sergey@logic.pdmi.ras.ru, snikolenko@gmail.com`
- Заходите в ЖЖ  [smartnik](#).